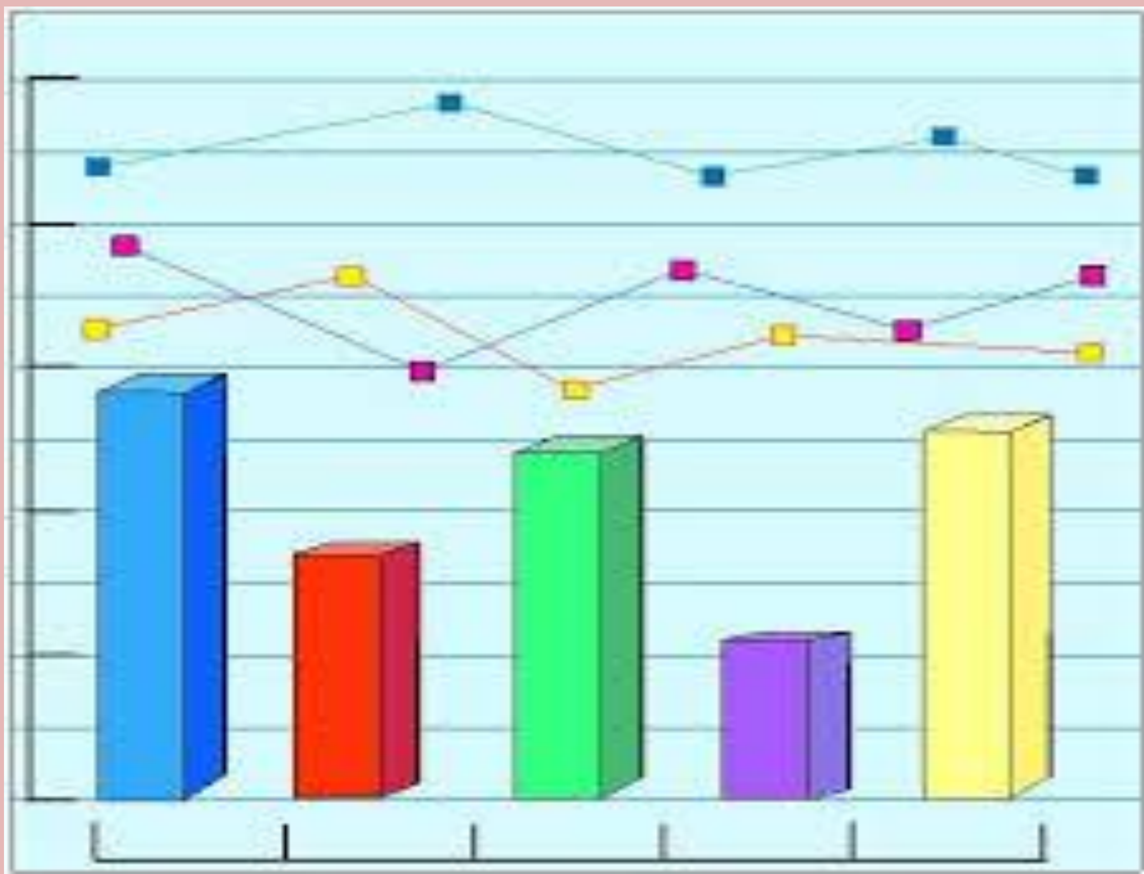
BED II- CPS 11

अधिगम के आँकलन हेतु साँख्यिकी

Statistics for Assessment of Learning



शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

ISBN: 13-978-93-85740-78-7
BED II- CPS 11 (BAR CODE)

BED II- CPS 11

अधिगम के आँकलन हेतु साँख्यिकी

Statistics for Assessment of Learning

शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

अध्ययन बोर्ड	विशेषज्ञ समिति
प्रोफेसर एच० पी० शुक्ल (अध्यक्ष- पदेन), निदेशक, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **प्रोफेसर मुहम्मद मियाँ** (बाह्य विशेषज्ञ- सदस्य), पूर्व अधिष्ठाता, शिक्षा संकाय, जामिया मिल्लिया इस्लामिया व पूर्व कुलपति, मौलाना आजाद राष्ट्रीय उर्दू विश्वविद्यालय, हैदराबाद **प्रोफेसर एन० एन० पाण्डेय** (बाह्य विशेषज्ञ- सदस्य), विभागाध्यक्ष, शिक्षा विभाग, एम० जे० पी० रुहेलखण्ड विश्वविद्यालय, बरेली **प्रोफेसर के० बी० बुधोरी** (बाह्य विशेषज्ञ- सदस्य), पूर्व अधिष्ठाता, शिक्षा संकाय, एच० एन० बी० गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर, उत्तराखण्ड **प्रोफेसर जे० के० जोशी** (विशेष आमंत्री- सदस्य), शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **प्रोफेसर रम्भा जोशी** (विशेष आमंत्री- सदस्य), शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० दिनेश कुमार** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० भावना पलड़िया** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **सुश्री ममता कुमारी** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा एवं सह-समन्वयक बी० एड० कार्यक्रम, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** (सदस्य एवं संयोजक), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा एवं समन्वयक बी० एड० कार्यक्रम, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय	**प्रोफेसर एच० पी० शुक्ल** (अध्यक्ष- पदेन), निदेशक, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **प्रोफेसर सी० बी० शर्मा** (बाह्य विशेषज्ञ- सदस्य), अध्यक्ष, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान, नोएडा **प्रोफेसर पवन कुमार शर्मा** (बाह्य विशेषज्ञ- सदस्य), अधिष्ठाता, शिक्षा संकाय व सामाजिक विज्ञान संकाय, अटल बिहारी बाजपेयी हिन्दी विश्वविद्यालय, भोपाल **प्रोफेसर जे० के० जोशी** (विशेष आमंत्री- सदस्य), शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **प्रोफेसर रम्भा जोशी** (विशेष आमंत्री- सदस्य), शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० दिनेश कुमार** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० भावना पलड़िया** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **सुश्री ममता कुमारी** (सदस्य), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा एवं सह-समन्वयक बी० एड० कार्यक्रम, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय **डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** (सदस्य एवं संयोजक), सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा एवं समन्वयक बी० एड० कार्यक्रम, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय

दिशाबोध: प्रोफेसर जे० के० जोशी, पूर्व निदेशक, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी

कार्यक्रम समन्वयक:	कार्यक्रम सह-समन्वयक:	पाठ्यक्रम समन्वयक:	पाठ्यक्रम सह समन्वयक:
डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड	**सुश्री ममता कुमारी** सह-समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड	**सुश्री ममता कुमारी** सह-समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड	**डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड

प्रधान सम्पादक	उप सम्पादक
डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड	**सुश्री ममता कुमारी** सह-समन्वयक, शिक्षक शिक्षा विभाग, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, हल्द्वानी, नैनीताल, उत्तराखण्ड

विषयवस्तु सम्पादक	भाषा सम्पादक	प्रारूप सम्पादक	प्रूफ़ संशोधक
डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय	**डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय	**डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय	**डॉ० प्रवीण कुमार तिवारी** सहायक प्रोफेसर, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय

सामग्री निर्माण

प्रोफेसर एच० पी० शुक्ल	प्रोफेसर आर० सी० मिश्र
निदेशक, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय	निदेशक, एम० पी० डी० डी०, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय

© उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, 2017

ISBN-13 -978-93-85740-78-7

प्रथम संस्करण: 2017 (पाठ्यक्रम का नाम: अधिगम के आँकलन हेतु साँख्यिकी, पाठ्यक्रम कोड- BED II- CPS 11)

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस पुस्तक के किसी भी अंश को ज्ञान के किसी भी माध्यम में प्रयोग करने से पूर्व उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय से लिखित अनुमति लेना आवश्यक है। इकाई लेखन से संबंधित किसी भी विवाद के लिए पूर्णरूपेण लेखक जिम्मेदार होगा। किसी भी विवाद का निपटारा उत्तराखण्ड उच्च न्यायालय, नैनीताल में होगा।

निदेशक, शिक्षाशास्त्र विद्याशाखा, उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय द्वारा निदेशक, एम० पी० डी० डी० के माध्यम से उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय के लिए मुद्रित व प्रकाशित।

प्रकाशक: उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय; **मुद्रक:** उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय।

कार्यक्रम का नाम: बी० एड०, कार्यक्रम कोड: BED- 17

पाठ्यक्रम का नाम: अधिगम के आँकलन हेतु साँख्यिकी, पाठ्यक्रम कोड- BED II- CPS 11

इकाई लेखक	खण्ड संख्या	इकाई संख्या
प्रोफेसर रजनी रंजन सिंह अधिष्ठाता, विशिष्ट शिक्षा संकाय, शकुन्तला मिश्रा राष्ट्रीय पुनर्वास विश्वविद्यालय, लखनऊ	**1**	**1, 2, 3 व 4**
	2	**1, 2, 3 व 4**

BED I- CPS 1
अधिगम के आँकलन हेतु साँख्यिकी
Statistics for Assessment of Learning

खण्ड 1		
इकाई सं०	**इकाई का नाम**	**पृष्ठ सं०**
1	आँकड़ों का संग्रहण: आँकड़ों के प्रकार, गुणात्मक आँकड़े तथा मात्रात्मक आँकड़े, मापन के पैमाने - नामित स्तर, क्रमित स्तर, आन्तरालिक स्तर तथा आनुपातिक स्तर, आँकड़ों के संग्रहण के उपकरण एवं तकनीकें	2-31
2	शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांत, शोध आँकड़ों की विश्वसनीयता व वैधता तथा इनसे संबंधित अन्य मुद्दे	32- 57
3	वर्णनात्मक साँख्यिकी: केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक	58- 99
4	वर्णनात्मक साँख्यिकी: विचरणशीलता के मापक, चतुर्थांक, शतांक, विभिन्न प्रासंगिक प्रतिदर्शजों की मानक त्रुटियाँ	100- 130
	खण्ड 2	
5	सहसंबंध के मापक: पियर्सन प्रोडक्ट मोमेंट सहसंबंध गुणांक, द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक व बिंदु-द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक	132- 167
6	अंकों के वितरण की प्रकृति का अवबोध: सामान्य वितरण वक्र – इसकी विशेषताएँ व उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व (कुकुदता) के मानों का परिकलन	168- 206
7	अनुमानात्मक साँख्यिकी- क्रांतिक अनुपात, शून्य परिकल्पना का परीक्षण, सार्थकता परीक्षण, त्रुटियों के प्रकार, एक पुच्छीय तथा द्विपुच्छीय परीक्षण, टी – परीक्षण तथा एफ – परीक्षण (एनोवा)	207-260
8	अप्राचलिक साँख्यिकी: काई वर्ग परीक्षण	262-292

इकाई संख्या 01: आँकड़ों का संग्रहण: आँकड़ों के प्रकार, गुणात्मक आँकड़े तथा मात्रात्मक आँकड़े, मापन के पैमाने - नामित स्तर, क्रमित स्तर, आन्तरालिक स्तर तथा आनुपातिक स्तर, आँकड़ों के संग्रहण के उपकरण एवं तकनीकें (Data Collection : Types of Data, Quantitative and Qualitative Data, Scales of Measurement - Nominal, Ordinal, Interval and Ratio Scales, Tools and Techniques for Data Collection)

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना
1.2 उद्देश्य
1.3 आँकड़ों के प्रकार
1.4 मापन के पैमाने
1.5 आँकड़े संग्रहण के उपकरण एवं तकनीकें
1.5.1 अवलोकन तकनीक
1.5.2 परीक्षण
1.5.3 साक्षात्कार
1.5.4 अनुसूची
1.5.5 प्रश्नावली
1.5.6 निर्धारण मापनी
1.6.7 प्रक्षेपीय तकनीक
1.5.8 समाजमिति
1.6 सारांश
1.7 शब्दावली
1.8 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर
1.9 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
1.10 निबंधात्मक प्रश्न

1.1 प्रस्तावना:

शैक्षिक शोध में परिमाणात्मक व गुणात्मक आँकड़ों के माध्यम से किसी नए सिद्धांत का निर्माण और पुराने सिद्धांत की पुष्टि की जाती है। शैक्षिक शोध चरों के विश्लेषण पर आधारित कार्य है। चरों

की विशेषताओं को आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त किया जाता है। चरों के गुणों को वर्गों या मात्राओं में व्यक्त किया जा सकता है, जिसे आँकड़े की संज्ञा दी जाती है। इस दृष्टि से आँकड़े दो प्रकार के यथा गुणात्मक आँकड़े (Quantitative Data) तथा मात्रात्मक आँकड़े (Qualitative Data) हो सकते हैं। इन आँकड़ों को मापन के विभिन्न पैमानों या स्तरों पर व्यक्त किया जाता है। मापन के इन चार स्तरों को मापन के चार पैमाने अर्थात् नामित पैमाना(Nominal Scale), क्रमित पैमाना (Ordinal Scale), अन्तरित पैमाना (Interval Scale) तथा अनुपाती पैमाना ((Ratio Scale) कहा जाता है। शोध कार्य में चरों का विश्लेषण करने हेतु आँकड़ों का संग्रहण एक चुनौती भरा कार्य होता है। गुणात्मक आँकड़े (Quantitative Data) तथा मात्रात्मक आँकड़े (Qualitative Data) का संग्रहण विभिन्न शोध उपकरणों के माध्यम से किया जाता है। प्रस्तुत इकाई में आप आँकड़ों के प्रकार यथा गुणात्मक आँकड़े तथा मात्रात्मक आँकड़े, आँकड़े संग्रहण के उपकरण एवं तकनीकें, मापन के चारों पैमाने यथा नामित स्तर, क्रमित स्तर, अन्तरित स्तर, तथा आनुपातिक स्तर का अध्ययन करेंगे।

1.2 उद्देश्य:

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के उपरांत आप-

- आँकड़ों के प्रकार को स्पष्ट कर सकेंगे।
- आँकड़ों के प्रकारों में विभेद कर सकेंगे।
- मापन के चारों पैमानों की व्याख्या कर सकेंगे।
- नामित स्तर, क्रमित स्तर, अन्तरित स्तर, तथा आनुपातिक स्तर में विभेद कर सकेंगे।
- आँकड़े संग्रहण के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न तकनीकों को वर्गीकृत कर सकेंगे।
- आँकड़े (Qualitative Data) संग्रहण हेतु विभिन्न शोध उपकरणों की व्याख्या कर सकेंगे।

1.3 आँकड़ों के प्रकार (Types of Data):

आँकड़ों के प्रकार को समझने से पहले चर व चरों (variables) की प्रकृति को समझना आवश्यक है। मापन के द्वारा वस्तुओं या व्यक्तियों के समूहों की विभिन्न विशेषताओं या गुणों का अध्ययन किया जाता है। इन विशेषताओं अथवा गुणों को चर राशि या चर कहते हैं। अतः कोई चर वह गुण या विशेषता है जिसमें समूह के सदस्य परस्पर कुछ न कुछ भिन्न होते हैं। उदाहरण के लिये किसी समूह के सदस्य भार, लम्बाई, बुद्धि या आर्थिक स्थिति आदि में भिन्न भिन्न होते हैं। इसलिए भार, लम्बाई, बुद्धि या आर्थिक स्थिति को चर कहा जायेगा। दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि चर के आधार पर किसी समूह के सदस्यों को कुछ उपसमूहों में बाँटा जा सकता है। यहाँ पर यह बात ध्यान रखने की है कि चर राशि पर समूह के समस्त सदस्यों का एक दूसरे से भिन्न होना आवश्यक नहीं है। यदि समूह का केवल एक सदस्य भी किसी गुण के प्रकार या मात्रा में अन्यों से भिन्न है तब भी इस गुण को चर के नाम से संबोधित किया जाएगा। चरों के गुणों को वर्गों या मात्राओं में व्यक्त किया जा सकता है, जिसे आँकड़े की संज्ञा दी जाती है। इस दृष्टि से आँकड़े दो प्रकार के यथा गुणात्मक आँकड़े (Quantitative Data) तथा मात्रात्मक आँकड़े (Qualitative Data) होते हैं।

1.**गुणात्मक आँकड़े(Qualitative Data) :** गुणात्मक आँकड़े गुण के विभिन्न प्रकारों को इंगित करते हैं। गुणात्मक आँकड़े, गुणात्मक चरों से सम्बन्धित होते हैं। उनके आधार पर समूह को कुछ स्पष्ट वर्गों या श्रेणियों में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक व्यक्ति इनमें से किसी एक वर्ग या श्रेणी का

सदस्य होता है। जैसे व्यक्तियों के किसी समूह को लिंगभेद के आधार पर पुरूष या महिला वर्गों में, छात्रों को उनके अध्ययन विषयों के आधार पर कला, विज्ञान या वाणिज्य वर्गों में अथवा किसी शहर के निवासियों को उनके धर्म के आधार पर हिन्दू, मुस्लिम, सिख व ईसाई वर्गों में बाँटा जा सकता है। इन उदाहरणों में लिंगभेद, अध्ययन वर्ग व धर्म गुणात्मक प्रकार के चर हैं तथा इनके सम्बन्धित गुणों को वर्गों या गुणात्मक आँकड़ों के माध्यम से अभिव्यक्त किया जाता है।

2.**मात्रात्मक आँकड़े (Quantitative Data):** चर के गुणों की मात्रा को मात्रात्मक आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त किया जाता है। इन आँकड़ों का संबंध मात्रात्मक चरों पर समूह के विभिन्न व्यक्ति भिन्न-भिन्न मात्रा में मान प्राप्त कर सकते हैं। जैसे छात्रों के किसी समूह के लिए परीक्षा प्राप्तांक, स्कूलों के किसी समूह के लिए छात्र संख्या अथवा व्यक्तियों के किसी समूह के लिए मासिक आय को संख्याओं द्वारा इंगित किया जाता है। इन उदाहरणों में प्राप्तांक, छात्र संख्या व मासिक आय मात्रात्मक आँकड़े हैं क्योंकि ये सम्बन्धित गुण की मात्राओं को बताते हैं।

(i) **सतत् आँकड़े (Continuous Data):** सतत् आँकड़े वे आँकड़े हैं जिनके लिए किन्हीं भी दो मानों के बीच का प्रत्येक मान धारण करना संभव होता है। जैसे भार व लम्बाई सतत् चर का उदाहरण है जिसके मान को सतत् आकड़ों के रूप में व्यक्त किया जाता है। व्यक्तियों का भार कुछ भी हो सकता है। भार के लिए यह आवश्यक नहीं है कि यह पूर्णांक में ही हो। अतः किसी व्यक्ति का भार 68.76 कि० ग्रा० (अथवा इससे भी अधिक दशमलव अंको में हो सकता है)। इसी प्रकार से लम्बाई को सतत् आँकड़ों में व्यक्त किया जा सकता है। स्पष्ट है कि सतत् चर (आँकड़े) किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु के बीच कोई भी मान प्राप्त कर सकता है।

(ii) **असतत् आँकड़े (Discrete Data):** असतत् चर को असतत् आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त किया जा सकता है। असतत् चर को खण्डित चर भी कहते हैं। यह वह चर है जिसके लिए किन्हीं दो मानों के बीच के प्रत्येक मान धारण करना सम्भव नहीं होता है। जैसे परिवार में बच्चों की संख्या पूर्णांकों में ही हो सकती है। किसी परिवार में बच्चों की संख्या 2.5 या 3.5 नहीं हो सकता। अतः परिवार में बच्चों की संख्या या किताब में पृष्ठों की संख्या को असतत् आँकड़ों में ही व्यक्त किया जा सकता है। स्पष्ट है कि असतत् आँकड़ों को केवल पूर्णांक संख्या में ही व्यक्त किया जा सकता है।

1.4 मापन के पैमाने (Scales of Measurement):

मापन प्रकिया को उसकी विशेषताओं यथा यथार्थता, प्रयुक्त इकाइयों, चरो की प्रकृति, परिणामों की प्रकृति आदि के आधार पर कुछ क्रमबद्ध प्रकारों में बाँटा जा सकता है। एस0एस स्टीबेन्स ने मापन की यथार्थता के आधार पर मापन के चार स्तर बताये हैं। ये चार स्तर (1) नामित स्तर (Nominal Level), (2) क्रमित स्तर (Ordinal Level), (3) अन्तरित स्तर (Interval Level), तथा (4) आनुपातिक स्तर (Ratio Scales) हैं। मापन के इन चार स्तरों को मापन के चार पैमाने अर्थात् नामित पैमाना(Nominal Scale), क्रमित पैमाना (Ordinal Scale), अन्तरित पैमाना (Interval Scale) तथा अनुपाती पैमाना ((Ratio Scale) भी कहा जाता है।

(1) नामित पैमाना (Nominal Scale) : यह सबसे कम परिमार्जित स्तर का मापन है। इस प्रकार का मापन किसी गुण अथवा विशेषता के नाम पर आधारित होता है। इसमें व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण अथवा विशेषता के प्रकार के आधार पर कुछ वर्गो अथवा समूहों में विभक्त कर दिया जाता है। इन वर्गो में किसी भी प्रकार का कोई अन्तर्निहित क्रम अथवा संबंध नहीं होता है। प्रत्येक वर्ग, गुण अथवा विशेषता के किसी एक प्रकार को व्यक्त करता है। विशेषता के प्रकार की दृष्टि से सभी वर्ग एक समान महत्व रखते हैं। गुण के विभिन्न प्रकारों को एक एक नाम, शब्द, अक्षर, अंक या कोई अन्य संकेत प्रदान कर दिया जाता है। जैसे निवास के आधार पर ग्रामीण व शहरी में बाँटना, विषयों के आधार पर स्नातक छात्रों को कला, विज्ञान, वाणिज्य, विधि, इन्जीनियरिंग, चिकित्सा आदि वर्गों में बाँटना, लिगं-भेद के आधार पर बच्चों को लड़के व लड़कियों में बाँटना,

फलों को आम, सेब, केला, अंगूर, सन्तरा आदि में वर्गीकृत करना, फर्नीचर को मेज, कुर्सी ,स्टूल आदि में बाँटना आदि नामित मापन के कुछ सटीक उदाहरण हैं।

स्पष्टतः नामित मापन एक गुणात्मक मापन है जिसमें गुण के विभिन्न प्रकारों, पहलुओं के आधार पर वर्गों की रचना की जाती है एवं व्यक्तियों/वस्तुओं को इन विभिन्न वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है। मापन प्रक्रिया में केवल यह देखा जाता है कि कोई व्यक्ति/वस्तु किस वर्ग की विशेषता को अपने में समाहित किये हुए हैं एवं तदनुसार उस व्यक्ति/वस्तु को उस वर्ग का नाम/संकेत/प्रतीक आवंटित कर दिया जाता है। इस प्रकार के मापन में विभिन्न वर्गो में सम्मिलित व्यक्तियों या सदस्यों की केवल गणना ही संभव होती है। वर्गों या समूहों को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त किये जाने वाले नामों, शब्दों, अक्षरों, अंकों या प्रतीकों के साथ कोई भी गणितीय संक्रिया जैसे जोड़, घटाना, गुणा या भाग आदि सम्भव नहीं होता। केवल प्रत्येक समूह के व्यक्तियों की गिनती की जा सकती है। स्पष्ट है कि नामित स्तर पर किये जाने वाले मापन में गुण विशेषता के विभिन्न पहुलओं के आधार पर वर्गों या समूहेां की रचना की जाती है।

(2) क्रमित पैमाना **(Ordinal Scale):** यह नामित मापन से कुछ अधिक परिमार्जित होता है। यह मापन वास्तव में गुण की मात्रा के आकार पर आधरित होता है। इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण के मात्रा के आधार पर कुछ ऐसे वर्गों में विभक्त कर दिया जाता है जिनमें एक स्पष्ट अन्तर्निहित क्रम निहित होता है। उन वर्गों में से प्रत्येक के कोई नाम, शब्द, अक्षर, प्रतीक या अंक प्रदान कर दिये जाते हैं। जैसे छात्रों को उनकी योग्यता के आधार पर श्रेष्ठ, औसत व कमजोर छात्रों के तीन वर्गो में बाँटना क्रमित मापन का एक सरल उदाहरण है। छात्रों के इन तीनों वर्गों में एक अंतर्निहित सम्बन्ध है। पहले वर्ग के छात्र दूसरे वर्ग के छात्रों से श्रेष्ठ है तथा दूसरे वर्ग के छात्र तीसरे वर्ग के छात्रों से श्रेष्ठ है। क्रमित मापन में यह आवश्यक नहीं की विभिन्न वर्गों के मध्य गुण की मात्रा का अन्तर सदैव ही समान हो। जैसे यदि सोनू, मोनू तथा रामू क्रमशः श्रेष्ठ वर्ग, औसत वर्ग तथा कमजोर वर्ग में है तो उसका अर्थ यह नहीं की सोनू व मोनू के बीच योग्यता में वही अन्तर है जो मोनू तथा रामू के बीच है। छात्रों को परीक्षा प्राप्तांको के आधार पर प्रथम, द्वितीय, तृतीय श्रेणियॉ या अनुतीर्ण निर्धारित करना, लम्बाई के आधार पर छात्रों को लम्बा, औसत या नाटा कहना, छात्रों को उनके कक्षास्तर के आधार पर प्राथमिक स्तर, माध्यमिक स्तर, स्नातक स्तर आदि में बाँटना, अभिभावकों को उनके सामाजिक आर्थिक स्तर के आधार पर उच्च, मध्यम व निम्न वर्गों में बाँटना इत्यादि क्रमित मापन के कुछ सरल उदाहरण हैं।

स्पष्ट है कि क्रमित मापन के विभिन्न वर्गों में गुण या विशेषता की उपस्थिति की मात्रा एक दूसरे से भिन्न होती है तथा उन वर्गों को इस आधार पर घटते अथवा बढते क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है। वर्गों को क्रमबद्ध करना सम्भव होने के कारण एक वर्ग के सदस्य अन्य वर्गों के सदस्यों से मापे जा रहे गुण की दृष्टि से श्रेष्ठ अथवा निम्न स्तरीय होते हैं। नामित मापन की तरह से क्रमित मापन में भी केवल प्रत्येक समूह के सदस्यों की गिनती करना सम्भव होता है। समूहों को व्यक्त करने वाले शब्दों, अक्षरों, प्रतीकों या अंको के साथ गणितीय सक्रियाएँ सम्भव नहीं होती है। परन्तु उन वर्गों को घटते क्रम में अथवा बढते क्रम में व्यवस्थित किया जा सकता है।

(3) अन्तरित पैमाना **(Interval Scale):** यह नामित व क्रमित मापन से अधिक परिमार्जित होता है। अंतरित मापन गुण की मात्रा अथवा परिमाण पर आधारित होता है । इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं में विद्यमान गुण की मात्रा को इस प्रकार ईकाइयों के द्वारा व्यक्त किया जाता है कि किन्हीं दो लगातार ईकाइयों में अन्तर समान रहता है। जैसे छात्रों को उनको गणित योग्यता के आधार पर अंक प्रदान करना अन्तरित मापन (Interval Scale) का एक सरल उदाहरण है। यहाँ यह स्पष्ट है कि 25 एवं 26 अंको के बीच ठीक वही अन्तर होता है जो अन्तर 45 व 46 अंकों के बीच होता है।

कि 55 एवं 56 अंकों के बीच ठीक वही अन्तर होता है जो अन्तर 45 व 49 अंकों के बीच होता है। अधिकांश शैक्षिक, सामाजिक तथा मनोवैज्ञानिक चरों का मापन प्रायः अन्तरित स्तर पर ही किया जाता है। समान दूरी पर स्थित अंक ही इस स्तर के मापन की ईकाइयाँ होती हैं। इन ईकाइयों के साथ जोड़ व घटाने की गाणितीय संक्रियाएँ की जा सकती हैं। इस स्तर के मापन में परम शून्य (Absolute Zero) या वास्तविक शून्य (Real Zero) जैसा गुणविहीनता को व्यक्त करने वाला कोई बिन्दु नहीं होता है जिसके कारण इस स्तर के मापन से प्राप्त परिणाम सापेक्षिक (Relative) तो होते हैं परन्तु निरपेक्ष (Absolute) नहीं होते हैं। इस स्तर पर शून्य बिन्दु तो हो सकता है परन्तु यह आभासी होता है। उदाहरण के लिए यदि कोई छात्र गाणित परीक्षण पर शून्य अंक प्राप्त करता है तो इसका अभिप्राय यह नहीं है कि वह छात्र गणित विषय में कुछ नहीं जानता है। इस शून्य का अभिप्राय केवल इतना है कि छात्र प्रयुक्त किये गये गणित परीक्षण के प्रश्नों को सही हल करने में पूर्णतया असफल रहा है परन्तु वह गणित के कुछ अन्य सरल प्रश्नों का सही हल भी कर सकता है। अन्तरित मापन से प्राप्त अंकों के साथ जोड़ तथा घटाने की गणनाएँ की जा सकती हैं। परन्तु गुणा तथा भाग की संक्रियाएँ करना सम्भव नहीं होता है। शिक्षा शास्त्र, समाज शास्त्र तथा मनोविज्ञान में प्रायः अन्तरित स्तर के मापन का ही प्रयोग किया जाता है।

(4) अनुपातिक पैमाना (Ratio Scale): यह मापन सर्वाधिक परिमार्जित स्तर का मापन है। इस प्रकार के मापन में अन्तरित मापन के सभी गुणों के साथ-साथ परम शून्य (Absolute Zero) या वास्तविक शून्य (Real Zero) की संकल्पना निहित रहती है। परम शून्य वह स्थिति है जिस पर कोई गुण पूर्ण रूप से अस्तित्व विहीन हो जाता है। जैसे लम्बाई, भार या दूरी अनुपातिक मापन का उदाहरण है क्योंकि लम्बाई, भार या दूरी को पूर्ण रूप से अस्तित्वहीन होने की संकल्पना की जा सकती है। अनुपातिक मापन की दूसरी विशेषता इस पर प्राप्त मापों की अनुपातिक तुलनीयता है। अनुपातिक मापन द्वारा प्रयुक्त मापन परिणामों को अनुपात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जबकि अन्तरित मापन द्वारा प्राप्त परिणाम गुण के परिणाम के अनुपातों के रूप में व्यक्त करने में असमर्थ होते हैं। जैसे 60 किलोग्राम भार वाले व्यक्ति को 30 किलोग्राम भार वाले व्यक्तियों से दो गुना भार वाला व्यक्ति कहा जा सकता है। परन्तु 140 बुद्धि-लब्धि वाले व्यक्ति को 70 बुद्धि-लब्धि वाले व्यक्ति से दो गुना बुद्धिमान कहना तर्कसंगत नहीं होगा। दरअसल तीस-तीस किलोग्राम वाले दो व्यक्ति भार की दृष्टि से 60 किलोग्राम वाले व्यक्ति के समान हो जायेंगे। परन्तु 70 व 70 बुद्धि-लब्धि वाले दो व्यक्ति मिलकर भी 140 बुद्धि-लब्धि वाले व्यक्ति के समान बुद्धिमान नही हो सकते हैं। अधिकांश भौतिकचरों का मापन प्रायः अनुपातिक स्तर पर किया जाता है।

स्पष्ट है कि अनुपातिक स्तर के मापन में परम शून्य या वास्तविक शून्य बिन्दु कोई कल्पित बिन्दु नहीं होता है वरन उसका अभिप्राय गुण की मात्रा का वास्तविक रूप में शून्य होने से होता है। लम्बाई, भार, दूरी जैसे चरों के मापन के समय हम ऐसे शून्य बिन्दु की कल्पना कर सकते हैं जहाँ लम्बाई, भार या दूरी का कोई अस्तित्व नहीं होता है। अनुपातिक मापन से प्राप्त परिणामों के साथ जोड़, घटाना, गुणा व भाग की चारों मूल गणितीय संक्रियाएँ की जा सकती है।

मापन के विभिन्न स्तरों का तुलनात्मक अध्ययन

मापन का स्तर (Level of Measurement)	**नामित स्तर (Nominal Level)**	**क्रमित स्तर (Ordinal Level)**	**अन्तरित स्तर (Interval Level)**	**अनुपातिक स्तर (Ratio Level)**
मात्रा/परिणाम (Magnitude)	नहीं	हाँ	हाँ	हाँ
समान अन्तराल	नहीं	नहीं	हाँ	हाँ

(Equal Interval)				
परम शून्य बिन्दु (Absolute Zero)	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ
संभाव्य गणितीय संक्रियाऐं (Probable Mathematical Operations)	गणना	गणना ≤ ≥	+ -	+, -, x, ÷
मापन परिणामों की प्रकृति (Nature of Results of Measurement)	गुण के विभिन्न पक्षों के आधार पर समतुल्य समूहों में वर्गीकरण।	गुण की मात्रा के आधार पर छोटे व बड़े क्रम में अव्यवस्थित समूहों में वर्गीकरण।	समान अन्तराल पर स्थित अंकों का अन्तराल	समान अन्तराल पर स्थित ऐसे अंकों का आवंटन जिसमें शून्य का अर्थ परम शून्य होता है।
साँख्यिकीय प्रविधियाँ (Statistical Techniques)	आवृति वितरण (Frequency Distribution) बहुलांक (Mode)	आवृत्ति वितरण बहुलांक(Mode),मध्या ंक (Median) , चतुर्थांक (Quartile),दशांक (Decile) प्रतिशतांक(Percentile) श्रेणी क्रम संहसबंध (Rank-order Correlation)	आवृति वितरण (Frequency Distribution) बहुलांक (Mode) , मध्यांक(Median), मध्यमान(Mean), मानक विचलन(S.D.) गुणनफल आघूर्ण सहसंबंध (Product Moment Correlation)	बहुलांक(Mode) ,मध्यांक(Median) मध्यमान (Mean) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) , गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) आदि
उदाहरण (Examples)	विद्यार्थियों को उनके लिंग भेद के आधार पर छात्र व छात्रा के दो वर्गों में बाँटना	छात्रों को उनकी योग्यता के आधार पर क्रम प्रदान करना	छात्रों को सम्प्राप्ति, बुद्धि तथा व्यक्तित्व परीक्षण पर प्राप्तांक प्रदान करना	छात्रों की लम्बाई तथा भार आदि का मापन करके अंक प्रदान करना

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

1. लिंग -भेद के आधार पर बच्चों को लड़के व लड़कियों में बाँटना ……….मापन का उदाहरण है।
2. असतत् चर को …………………………चर भी कहते हैं।
3. भार व लम्बाई ……………………चर का उदाहरण है।
4. लम्बाई के आधार पर छात्रों को लम्बा, औसत या नाटा कहना …………….म ापन के उदाहरण हैं।
5. गणित योग्यता के आधार पर अंक प्रदान करना …………मापन का उदाहरण है।
6. नामित स्तर पर शून्य बिन्दु तो होता है परन्तु यह ……………………होता है।
7. ……………………….पैमाना सर्वाधिक परिमार्जित स्तर का मापन है।
8. छात्रों की लम्बाई तथा भार आदि का मापन करके अंक प्रदान करना …………स्तर का उदाहरण है।
9. श्रेणी क्रम संहसबंध का परिकलन ………………स्तर के पैमाने पर किया जा सकता है।
10. भौतिकचरों का मापन प्रायः ………………….स्तर पर किया जाता है।

1.5 आँकड़े संग्रहण के उपकरण एवं तकनीकें (Tools and Techniques of Data Collection):

शैक्षिक शोध में परिमाणात्मक व गुणात्मक आँकड़ों के माध्यम से नवीन सिद्धांत का निर्माण और प्राचीन सिद्धांत की पुष्टि की जाती है। शोध कार्य में चरों का विश्लेषण करने हेतु आँकड़ों का संग्रहण एक जटिल कार्य होता है। गुणात्मक आँकड़े (Quantitative Data) तथा मात्रात्मक आँकड़े (Qualitative Data) के संग्रहण के लिए विभिन्न शोध उपकरणों को प्रयुक्त किया जाता है। इन आँकड़े के संग्रहण के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न तकनीको को पाँच मुख्य भागों में बाँटा जा सकता है। ये पाँच भाग निम्नवत हैं-

(1) अवलोकन तकनीक (Observation Technique)

(2) स्व-आख्या तकनीक (Self Report Technique)

(3) परीक्षण तकनीक (Testing Technique)

(4) समाजमितीय तकनीक (Sociometric Technique)

(5) प्रक्षेपीय तकनीक (Projective Technique)

इन पाँच तकनीकों का संक्षिप्त वर्णन संक्षेप में आगे प्रस्तुत हैं-

1. अवलोकन तकनीकः (Observation Technique): अवलोकन तकनीक से अभिप्राय किसी व्यक्ति के व्यवहार को देखकर या अवलोकित करके उसके व्यवहार का मापन करने

की प्राविधि से है। अवलोकन को व्यवस्थित एवं औपचारिक बनाने के लिए अवलोकन कर्ता चैक लिस्ट, अवलोकन चार्ट, मापनी परीक्षण, एनकडोटल अभिलेख आदि उपकरणों का प्रयोग कर सकता है। स्पष्ट है कि अवलोकन एक तकनीक के रूप में अधिक व्यापक है जबकि एक उपकरण के रूप में इसका क्षेत्र सीमित रहता है।

(2) **स्व-आख्या तकनीक (Self Report Technique):** स्व-आख्या तकनीक में मापे जा रहे व्यक्ति से ही उसके व्यवहार के सम्बन्ध में जानकारी पूछी जाती है। दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि व्यक्ति अपने बारे में स्वयं सूचना देता है जिसके आधार पर उसके गुणों को अभिव्यक्त किया जाता है। स्पष्ट है कि इस तकनीक में इस बात का मापन नहीं होता है कि व्यक्ति का क्या गुण है बल्कि इस बात का मापन होता है कि व्यक्ति किस गुणों को स्वयं में होना बताता है। यह तकनीक सामाजिक बांछनीयता से प्रभावित परिणाम देता है। व्यक्ति सामाजिक रूप से बांछनीय गुणों को ही स्वयं में बताता है तथा अवांछनीय गुणों को छिपा लेता है। प्रश्नावली, साक्षात्कार, अभिवृति मापनी इस तकनीक के लिए प्रयोग में आने वाले कुछ उपकरण हैं।

(3) **परीक्षण तकनीक (Testing Technique):** परीक्षण तकनीक में व्यक्ति को किन्हीं ऐसी परिस्थिति में रखा जाता है जो उसके वास्तविक व्यवहार या गुणों को प्रकट कर दें। मापनकर्ता व्यक्ति के सम्मुख कुछ एसी परिस्थितियों या समस्याऐं को रखता है तथा उन पर व्यक्ति के द्वारा की गई प्रतिक्रियाओं के आधार पर उसके गुणों की मात्रा का निर्धारण करता है। विभिन्न प्रकार के परीक्षण जैसे सम्प्रति परीक्षण, बुद्धि परीक्षण, निदानात्मक परीक्षण, अभिरूचि परीक्षण, मूल्य परीक्षण आदि इस तकनीक के उदाहरण हैं।

(4) **समाजमितीय तकनीक (Sociometric Technique):** समाजमितीय तकनीक सामाजिक सम्बन्धों, समायोजन व अन्त:क्रिया के मापन में काम आती है। इस तकनीक में व्यक्ति अन्य व्यक्तियों से किस प्रकार के सम्बन्ध रखता है तथा अन्य व्यक्ति उससे कैसे सम्बन्ध रखते हैं, जैसे प्रश्नों पर उनके द्वारा दिये गये प्रत्युत्तरों का विश्लेषण किया जाता है। सामाजिक गतिशीलता के मापन के लिए यह सर्वोत्तम तकनीक है।

(5)**प्रक्षेपीय तकनीक (Projective Technique):** प्रक्षेपीय तकनीक में व्यक्ति के सम्मुख किसी असंरचित उद्दीपन को प्रस्तुत किया जाता है तथा व्यक्ति उस पर प्रतिक्रिया देता है। इस तकनीक की मान्यता यह है कि व्यक्ति अपनी पसन्द, नापसन्द, विचार, दृष्टिकोण, आवश्यकता आदि को अपनी प्रतिक्रिया में आरोपित कर देता है जिनका विश्लेषण करके व्यक्ति के गुणों को जाना जा सकता है। रोशा का मसि लक्ष्य परीक्षण (Rorschach Ink Blot Test), टी0ए0टी0 (TAT Test), शब्द साहचर्य परीक्षण (Word Association Test), पूर्ति परीक्षण (Completion Test) इस तकनीक के प्रयोग के कुछ प्रसिद्ध उदाहरण हैं।

आँकड़े संग्रहित करने के उपकरण (Data Gathering Tools): शोध के क्षेत्र में आँकड़े संग्रहित किये जाने वाले प्रमुख उपकरणों के निम्नवत सूचीबद्ध किया जा सकता है-

1. अवलोकन (Observation)

2. परीक्षण (Test)

3. साक्षात्कार (Interview)

4. अनुसूची (Schedule)

5. प्रश्नावली (Questionnaire)

5. प्रश्नावली (Questionnaire)

6. निर्धारण मापनी (Rating Scale)

7. प्रक्षेपीय तकनीक (Projective Techniques)

8. समाजमिति (Sociometry)

इन सभी आँकड़े संग्रहित किये जाने वाले प्रमुख उपकरणों का संक्षिप्त वर्णन प्रस्तुत किया जा रहा है ताकि इन सभी के विशेषताओं के बारे में आप अवगत हो सकें।

1.5.1 अवलोकन (Observation):

अवलोकन व्यक्ति के व्यवहार के मापन की अत्यन्त प्राचीन विधि है। व्यक्ति अपने आस-पास घटित होने वाली विभिन्न क्रियाओं तथा घटनाओं का अवलोकन करता रहता है। मापन के एक उदाहरण के रूप में अवलोकन का संबंध किसी व्यक्ति अथवा छात्र के बाह्य व्यवहार को देखकर उसके व्यवहार का वर्णन करने से है। अवलोकन को मापन की एक वस्तुनिष्ठ विधि के रूप में स्वीकार नहीं किया जाता फिर अनेक प्रकार की परिस्थितियों में तथा अनेक प्रकार के व्यवहार के मापन के इस विधि का प्रयोग किया जाता है। छोटे बच्चों के व्यवहार का मापन करने के लिए यह विधि अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होती है। छोटे बच्चे मौखिक तथा लिखित परीक्षाओं के प्रति जागरूक नहीं होते है जिसकी वजह से मौखिक तथा लिखित परीक्षाओं के द्वारा उनका मापन करना कठिन हो जाता है। व्यक्तित्व के गुणों का मापन करने के लिए भी अवलोकन का प्रयोग किया जा सकता है। छोटे बच्चों, अनपढ व्यक्तियों, मानसिक-रोगियों, विकलांगों तथा अन्य भाषा-भाषी लोगों के व्यवहार का मापन करने के लिए अवलोकन एक मात्र उपयोगी विधि है। अवलोकन की सहायता से ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक तीनों ही प्रकार के व्यवहारों का मापन किया जा सकता है।

अवलोकन करने वाले व्यक्ति की दृष्टि से अवलोकन दो प्रकार का हो सकता है- स्वअवलोकन (Self Observation) तथा बाह्य अवलोकन (External Observation) । स्वअवलोकन में व्यक्ति अपने स्वयं के व्यवहार का अवलोकन करता है जबकि बाह्य अवलोकन में अवलोकनकर्ता अन्य व्यक्तियों के व्यवहार का अवलोकन करता है। निःसन्देह स्वयं के व्यवहार का ठीक- ठीक अवलोकन करना एक कठिन कार्य होता है जबकि अन्य व्यक्तियों के व्यवहार को देखना तथा उसका लेखा-जोखा रखना सरल होता है। वर्तमान समय में प्रायः अवलोकन से अभिप्राय दूसरे व्यक्तियों के व्यवहार के अवलोकन को माना जाता है।

अवलोकन नियोजित भी हो सकता है तथा अनियोजित भी हो सकता है। नियोजित अवलोकन (Planned Observation) किसी विशेष उद्देश्य की पूर्ति के लिये किया जाता है। इसके विपरीत अनियोजित अवलोकन (Unplanned Observation) किसी सामान्य उद्देश्य की दृष्टि से किया जाता है। अवलोकन को प्रत्यक्ष अवलोकन (Direct Observation) तथा अप्रत्यक्ष अवलोकन (Indirect Observation) के रूप में भी बाँटा जा सकता है। प्रत्यक्ष अवलोकन से अभिप्राय किसी व्यवहार को उसी रूप में देखना है जैसाकि वह व्यवहार हो रहा है। इसमें मापनकर्ता या शोधकर्ता व्यवहार का अवलोकन स्वयं करता है। परोक्ष अवलोकन में किसी व्यक्ति के व्यवहार के संबंध में अन्य व्यक्तियों से पूछा जाता है। प्रत्यक्ष अवलोकन दो प्रकार का हो सकता है जिन्हें क्रमशः सहभागिक अवलोकन (Participant Observation) तथा असहभागिक अवलोकन (Non-partcipant Observation) कहा जाता है। सहभागिक अवलोकन में अवलोकनकर्ता उस समूह का अंग होता है जिसका वह अवलोकन कर रहा होता है जबकि असहभागिक अवलोकन में अवलोकनकर्ता समूह के क्रिया कलापों मे कोई भाग नहीं लेता है।

अवलोकन को नियंत्रित अवलोकन (Controlled Observation) तथा अनियंत्रित अवलोकन (Uncontrolled Observation) के रूप में भी बाँटा जा सकता है। नियंत्रित अवलोकन में अवलोकनकर्ता कुछ विशिष्ट परिस्थितियाँ निर्मित करके अवलोकन करता है जबकि अनियंत्रित अवलोकन में वास्तविक परिस्थितियों में अवलोकन कार्य किया जाता है। नियंत्रित अवलोकन में व्यवहार के अस्वाभाविक हो जाने की संभावना रहती है क्योंकि अवलोकन किया जाने वाला व्यक्ति सजग हो जाता है। अनियंत्रित अवलोकन में अवलोकन किए जाने वाले स्वयं के अवलोकन किये जाने की प्रायः कोई जानकारी नहीं होती जिससे वह अपने स्वाभाविक व्यवहार का प्रदर्शन करता है।

1.5.2 परीक्षण (Tests):

परीक्षण वे उपकरण हैं जो किसी व्यक्ति अथवा व्यक्तियों के किसी समूह के व्यवहार का क्रमबद्ध तथा व्यवस्थित ज्ञान प्रदान करते हैं। परीक्षण से तात्पर्य किसी व्यक्ति को ऐसी परिस्थितियों में रखने से है जो उसके वास्तविक गुणों को प्रकट कर दे। विभिन्न प्रकार के गुणों को मापने के लिए विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है। छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि ज्ञात करने के लिए उपलब्धि परीक्षणों (Achievement Tests) का प्रयोग किया जाता है, व्यक्तित्व को जानने के लिए व्यक्तित्व परीक्षण (Personality Tests) का प्रयोग किया जाता है, अभिक्षमता ज्ञात करने के लिए अभिक्षमता परीक्षण (Aptitude Test) का प्रयोग किया जाता है, छात्रों की कठिनाइयों को जानने के लिए निदानात्मक परीक्षण (Diagnostic Test) का प्रयोग किया जाता है, आदि आदि। परीक्षणों को अनेक ढंग से वर्गीकृत किया जा सकता है।

परीक्षण के प्रकृति के आधार पर परीक्षणों को मौखिक परीक्षण (Oral Test), लिखित परीक्षण (Written Test) तथा प्रायोगात्मक परीक्षण (Experimental Test) के रूप में बाँटा जा सकता है। मौखिक परीक्षा में मौखिक प्रश्नोत्तर के द्वारा छात्रों के व्यवहार का मापन किया जाता है। परीक्षक मौखिक प्रश्न ही करता है तथा परीक्षार्थी मौखिक रूप में ही उनका उत्तर प्रदान करता है स्पष्ट है कि मौखिक परीक्षण के द्वारा एक समय में एक ही छात्र के गुणों को मापा जा सकता है। लिखित परीक्षण में प्रश्न लिखित रूप में पूछे जाते हैं तथा छात्र उनका उत्तर लिख कर देता हैं। लिखित परीक्षणों को एक साथ अनेक छात्रों के ऊपर प्रशासित किया जा सकता है। उससे कम समय में अधिक व्यक्तियों की योग्यताओं का मापन सम्भव है। प्रयोगात्मक परीक्षणों में छात्रों को कोई प्रयोगात्मक कार्य करना होता है तथा उस प्रयोगात्मक कार्य के आधार पर उनका मापन किया जाता है। प्रायोगात्मक परीक्षणों को निष्पादन परीक्षण भी कहा जा सकता है।

परीक्षण के प्रशासन के आधार पर परीक्षण को दो भागों व्यक्तिगत परीक्षण (Individual Test) तथा सामूहिक परीक्षण (Group Test) में बाँटा जा सकता है। व्यक्तिगत परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनके द्वारा एक समय में केवल एक ही व्यक्ति की योग्यता का मापन किया जा सकता है। इसके विपरीत सामूहिक परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनके द्वारा एक ही समय में अनेक व्यक्तियों की किसी योग्यता का मापन किया जा सकता है। मौखिक परीक्षण तथा निष्पादन परीक्षण प्रायः व्यक्तिगत परीक्षण के रूप में प्रशासित किये जाते हैं जबकि लिखित परीक्षण प्रायः सामूहिक परीक्षण के रूप में प्रशासित किये जाते हैं।

परीक्षण में प्रयुक्त सामग्री के प्रस्तुतीकरण के आधार पर भी परीक्षणों को दो भागों शाब्दिक परीक्षण (Verbal Test) तथा अशाब्दिक परीक्षण (Nonverbal Test) में बाँटा जा सकता है। शाब्दिक परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनमें प्रश्न तथा उत्तर किसी भाषा के माध्यम से अभिव्यक्त किये जाते हैं जबकि अशाब्दिक परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनमें प्रश्न तथा उत्तर दोनों ही (अथवा केवल

उत्तर) संकेतों या चित्रों या निष्पादन आदि भाषा रहित माध्यमों की सहायता से प्रस्तुत किये जाते हैं।

परीक्षणों में प्रयुक्त प्रश्नों के शैक्षिक उद्देश्यों के आधार पर भी परीक्षणों के विभिन्न प्रकारों में बाँटा जा सकता है। यदि परीक्षण के अधिकांश प्रश्न केवल शैक्षिक उद्देश्य को मापन कर रहे होते हैं तो परीक्षण को ज्ञान परीक्षण (Knowledge Test) कहा जा सकता है। इसके विपरीत यदि परीक्षण अवबोध का मापन करता है तो उसे बोध परीक्षण (Comprehension Test) कहा जाता है। यदि परीक्षण के द्वारा मुख्यतः छात्रों के कौशलों का मापन होता है तो परीक्षण को कौशल परीक्षण (Skill Test) कहा जाता है। यदि परीक्षण मुख्यतः नई परिस्थितयों में ज्ञान, बोध व कौशल के अनुप्रयोग क्षमता का पता लगाता है तो उसे अनुप्रयोग परीक्षण, कहा जा सकता है। बोध परीक्षण तथा कौशल परीक्षण जहाँ छात्रों की योग्यता का केवल मापन करते हैं वही अनुप्रयोग परीक्षण छात्रों को पूर्णतया नई परिस्थितियों में क्या व कैसे करना है कि परिस्थिति उपलब्ध कराकर उन्हें सीखने का अवसर भी प्रदान करते हैं। इसलिए अनुप्रयोग परीक्षणों को अन्तः अधिगम परीक्षण भी कहा जा सकता है।

परीक्षणों की रचना के आधार पर परीक्षणों को प्रमाणीकृत परीक्षण (Standardised Test) तथा अप्रमापीकृत परीक्षण (Unstandardised Test) या अध्यापक निर्मित परीक्षण (Teacher-made Test) में बाँटा जा सकता है। प्रमाणीकृत परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनके प्रश्नों का चयन पद-विश्लेषण के आधार पर करते हैं और जिनकी विश्वसनीयता (Reliability),वैधता (Validity) तथा मानक (Norms) उपलब्ध रहते हैं। अप्रमापीकृत परीक्षण या अध्यापक निर्मित परीक्षण वे हैं जिन्हें कोई अध्यापक अपनी आवश्यकतानुसार तात्कालिक रूप से तैयार कर लेता है।

प्रश्नों के उत्तर के फलांकन के आधार पर भी परीक्षणों को दो भागों निबन्धात्मक परीक्षण (Essay type Test) तथा वस्तुनिष्ठ परीक्षण (Objective Test) में बाँटा जा सकता है। निबन्धात्मक परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनमें परीक्षार्थी प्रश्नों का उत्तर देने के लिए स्वतन्त्र होता है तथा उसे विस्तृत उत्तर प्रदान करना होता है। जबकि वस्तुनिष्ठ परीक्षार्थी को कुछ निश्चित शब्दों या वाक्यांशों की सहायता से ही प्रश्नों के उत्तर प्रदान करने होते हैं तथा उत्तर देने में छूट कम हो जाती है।

परीक्षण के द्वारा मापे जा रहे गुण के आधार पर भी परीक्षणों को अनेक भागों में बाँटा जा सकता है जैसे उपलब्धि परीक्षण(Achievement Test), निदानात्मक परीक्षण (Diagnostic Test) , अभिक्षमता परीक्षण (Aptitude Test) , बुद्धि परीक्षण (Intelligence Test), रूचि परीक्षण (Interest Test), व्यक्तित्व परीक्षण (Personality Test) आदि। सम्प्रति परीक्षणों की सहायता से विभिन्न विषयों में छात्रों केा द्वारा अर्जित योग्यता का मापन किया जाता है। निदानात्मक परीक्षणों की सहायता से विभिन्न विषयों में छात्रों की कठिनाईयों को जानकर उन्हें दूर करने का प्रयास किया जाता है। बुद्धि परीक्षण के द्वारा व्यक्ति की मानसिक योग्यताओं का पता चलता है। अभिक्षमता परीक्षण विशिष्ट क्षेत्रों में व्यक्ति की मापी क्षमता या योग्यता का मापन करते हैं। रूचि परीक्षणों के द्वारा छात्रों की शैक्षिक तथा व्यावसायिक रूचियों को मापा जाता है। व्यक्तित्व परीक्षण की सहायता से व्यक्ति के व्यक्तित्व की विशेषताओं को जाना जाता है।

परीक्षण के प्रकृति के आधार पर परीक्षणों को दो भागों सार्विक परीक्षण (Omnibus Test) तथा एकाकी परीक्षण (Single Test) में बाँटा जा सकता है। सार्विक परीक्षण एक साथ अनेक गुणों का मापन करता है जबकि एकाकी परीक्षण एक बार में केवल एक ही गुण या योग्यता का मापन करता है।

परीक्षण को पूरा करने में लगने वाले समय के आधार पर परीक्षणों को गति परीक्षण (Speed Test) तथा सामर्थ्य परीक्षण (Power Test) के रूप में भी बाँटा जा सकता है। गति परीक्षणों में सरल प्रश्न

अधिक संख्या में दिये होते हैं तथा छात्रों द्वारा निश्चित समय में ही हल किये गये प्रश्नों की संख्या के आधार पर उनकी प्रश्न हल करने की गति का मापन किया जाता है। सामर्थ्य परीक्षण में कुछ कठिन प्रश्न दिये होते हैं तथा छात्रों की प्रश्नों को हल करने की सामर्थ्य का पता लगाया जाता है।

परीक्षणों का चयन परीक्षण (Selection Test) तथा हटाव परीक्षण (Elimination Test) के रूप में भी वर्गीकृत किया जा सकता है। चयन परीक्षणों का उद्देश्य व्यक्ति को सकारात्मक पक्षों अथवा श्रेष्ठ बिन्दुओं को सामने लाकर उसके चयन का मार्ग प्रशस्त करना है। उसके विपरीत हटाव परीक्षणों का उद्देश्य व्यक्ति के नकारात्मक पक्षों अथवा कमजोर बिन्दुओं को जानकर उसे चयनित न करने के प्रभावों को प्रस्तुत करना होता है । औसत कठिनाई वाला परीक्षण प्रायः चयन परीक्षण का कार्य करता है जबकि अत्यन्त कठिनाई वाले प्रश्नों से युक्त परीक्षण प्रायः हटाव परीक्षण का कार्य सम्पादित करता है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

11. ………………परीक्षण वे परीक्षण हैं जिनके प्रश्नों का चयन पद-विश्लेषण के आधार पर करते हैं ।
12. प्रमाणीकृत परीक्षण की………………,वैधता (Validity) तथा मानक (Norms) उपलब्ध रहते हैं।
13. …………….परीक्षण वे हैं जिन्हें कोई अध्यापक अपनी आवश्यकतानुसार तात्कालिक रूप से तैयार कर लेता है।
14. ……………….अवलोकन में अवलोकनकर्ता उस समूह का अंग होता है जिसका वह अवलोकन कर रहा होता है ।
15. ………………अवलोकन में अवलोकनकर्ता समूह के क्रिया कलापों मे कोई भाग नहीं लेता है।
16. प्रक्षेपीय तकनीक में व्यक्ति के सम्मुख किसी …………………उद्दीपन को प्रस्तुत किया जाता है तथा व्यक्ति उस पर प्रतिक्रिया देता है।

1.5.3 साक्षात्कार (Interview):

साक्षात्कार व्यक्तियों से सूचना संकलित करने का सर्वाधिक प्रचलित साधन है। विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों में इसका प्रयोग किया जाता रहा है। साक्षात्कार में किसी व्यक्ति से आमने सामने बैठकर विभिन्न प्रश्न पूछे जाते हैं तथा उसके द्वारा दिये गये उत्तर के आधार पर उसकी योग्यताओं का मापन किया जाता है। आमने सामने बैठकर प्रत्यक्ष वार्तालाप करने के कारण साक्षात्कार को प्रत्यक्षालाप के नाम से भी सम्बोधित किया जाता है। शिक्षा संस्थाओं में छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि का मापन करने के लिए जाने वाले साक्षात्कार को मौखिकी के नाम से पुकारा जाता हैः-

साक्षात्कार दो प्रकार के हो सकते हैं। ये दो प्रकार क्रमशः प्रमाणीकृत साक्षात्कार (Standardised Interview) तथा अप्रमाणीकृत साक्षात्कार (Unstandardised Interview) हैं।

प्रमाणीकृत साक्षात्कार को संरचित साक्षात्कार (Structured Interview) भी कहते हैं। इस प्रकार के साक्षात्कार में पछे जाने वाले प्रश्नों. उनके क्रम तथा उनकी भाषा आदि को पहले से ही निश्चित

कर लिया जाता है। इस प्रकार के साक्षात्कार में साक्षात्कारकर्ता को प्रश्नों के सम्बन्ध में कुछ (परन्तु अत्यधिक कम) स्वतन्त्रता दी जा सकती है। परन्तु यह स्वतन्त्रता के लिए साक्षात्कार प्रश्नावली को पहले से ही सावधानी के साथ तैयार कर लिया जाता है। स्पष्टतः प्रमाणीकृत साक्षात्कार में सभी छात्रों में एक से प्रश्न, एक ही क्रम में तथा एक ही भाषा में पूछे जाते हैं।

अप्रमाणीकृत सक्षात्कार को असंरचित साक्षात्कार (Unstructured Interview) भी कहते हैं। इस प्रकार के साक्षात्कार लोचनीय तथा मुक्त होते हैं। यद्यपि इस प्रकार के साक्षात्कार में पूछे जाने वाले प्रश्न काफी सीमा तक मापन के उद्देश्यों के ऊपर निर्भर करता है। फिर भी प्रश्नों का क्रम, उनकी भाषा आदि साक्षात्कारकर्ता के ऊपर निर्भर करता है। उनमें किसी भी प्रकार के साक्षात्कार प्रश्नावली का प्रयोग नहीं किया जाता है। स्पष्टतः अप्रमाणीकृत साक्षात्कार में विभिन्न छात्रों से पूछे गये प्रश्न भिन्न भिन्न हो सकते हैं। कभी कभी परिस्थितियों के अनुसार साक्षात्कार का एक मिश्रित रूप अपनाना पडता है जिसे अर्धप्रमाणीकृत साक्षात्कार (Semi-structured Interview) अथवा अर्धसंरचित साक्षात्कार कहते है। इसमें साक्षात्कारकर्ता तात्कालिक परिस्थितियों के अनुरूप निर्णय लेकर पूर्व निर्धारित प्रश्नों के साथ साथ कृछ विकल्पात्मक प्रश्नों का प्रयोग कर सकता है।

उद्देश्य के अनुरूप साक्षात्कार कई प्रकार के हो सकते हैं जैसे सूचनात्मक साक्षात्कार (Informative Interview), परामर्श साक्षात्कार(Counselling Interview), निदानात्मक साक्षात्कार (Diagnostic Interview), चयन साक्षात्कार (Selection Interview) तथा अनुसंधान साक्षात्कार (Reserch Interview) आदि। कुछ विद्वान साक्षात्कार को औपचारिक साक्षात्कार (Formal Interview) तथा अनौपचारिक साक्षात्कार (Informal Interview) में भी बॉटते हैं जबकि कुछ विद्वान साक्षात्कार को व्यक्तिगत साक्षात्कार (Individual Interview) तथा सामूहिक साक्षात्कार (Group Interview) में बॉटते हैं। व्यक्तिगत साक्षात्कार में एकबार में केवल एक ही व्यक्ति का साक्षात्कार लिया जाता है जबकि सामूहिक साक्षात्कार में एक साथ कई व्यक्तियों को बैठा लिया जाता है। सामूहिक साक्षात्कारों से व्यक्ति द्वारा प्रश्नों के उत्तरों को शीघ्रता से देने का पता चलता है। सामूहिक विचार-विमर्श भी सामूहिक साक्षात्कार का एक प्रकार है।

प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित करके सूचनायें संकलित करने की दृष्टि से साक्षात्कार अन्यन्त महत्वपूर्ण होता है। साक्षात्कार के द्वारा अनेक ऐसी गुप्त तथा व्यक्तिगत सूचनायें प्राप्त हो सकती हैं जो मापने के अन्य उपकरणों से प्रायः प्राप्त नहीं हो पाती है। किसी व्यक्ति के अतीत को जानने के अथवा उसके गोपनीय अनुभवों की झलक प्राप्त करने के कार्य में साक्षात्कार एक उपयोगी भूमिका अदा करता है। बहुपक्षीय तथा गहन अध्ययन हेतु साक्षात्कार बहुत उपयोगी सिद्ध होता है। इसके अतिरिक्त अशिक्षितों तथा बालकों से सूचना प्राप्त करने की दृष्टि से भी साक्षात्कार अत्यन्त महत्वपूर्ण होता है। साक्षात्कार मे साक्षात्कारकर्ता आवश्यकतानुसार परिवर्तन कर सकता है जो अन्य मापन उपकरण में सम्भव नहीं होता है।

साक्षात्कार की सम्पूर्ण प्रक्रिया को तीन भागों में (1) साक्षात्कार का प्रारम्भ (2) साक्षात्कार का मुख्य भाग तथा (3) साक्षात्कार का समापन में बाँटा जा सकता है। साक्षात्कार के प्रारम्भ में साक्षात्कार लेने वाला व्यक्ति साक्षात्कार देने वाले व्यक्ति से आत्मीयता स्थापित करता है। इसके लिए साक्षात्कारकर्ता को साक्षात्कार देने वाले व्यक्ति का स्वागत करते हुए परिचय प्राप्त करना होता है तथा यह विश्वास दिलाना होता है कि उसके द्वारा दी गई सूचनायें पूर्णतया गोपनीय रहेंगी। आत्मीयता स्थापित हो जाने के उपरान्त साक्षात्कार का मुख्य भाग आता है जिसमें वांछित सूचनाओं का संकलन किया जाता है।

प्रश्न करते समय साक्षात्कारकर्ता को ध्यान रखना चाहिए कि (1)प्रश्न क्रमबद्ध हों, (2)प्रश्न सरल व

स्पष्ट हों, (3) साक्षात्कार देने वाले व्यक्ति को अपनी अभिव्यक्ति का उचित अवसर मिल सके, तथा (5) साक्षात्कार देने वाले व्यक्ति के द्वारा दिये गये उत्तरों केा धैर्य व सहानुभूति के साथ सुना जाये। वांछित सूचनाओं की प्राप्ति के उपरान्त साक्षात्कार को इस प्रकार से समाप्त किया जाना चाहिए कि साक्षात्कार देने वाले व्यक्ति के संतोष का अनुभव साक्षात्कारकर्ता को हो । साक्षात्कार की समाप्ति मधुर वातावरण में धन्यवाद ज्ञापन के साथ करनी चाहिए। किन्हीं बातों के विस्मरण की सम्भावना से बचने के लिए साक्षात्कार के साथ-साथ अथवा तत्काल उपरान्त मुख्य बातों केा लिख देना चाहिए एवं साक्षात्कार के उपरान्त यथाशीघ्र साक्षात्कारकर्ता को अपना प्रतिवेदन तैयार कर लेना चाहिए।

1.5.4 अनुसूची (Schedule):

अनुसूची समंक संकलन हेतु बहुतायत से प्रयुक्त होने वाला एक मापन उपकरण है। इसका उपयोग विभिन्न प्रकार की सूचनाओं को प्राप्त करने के लिए किया जाता है। सामान्यतः अनुसूची की पूर्ति संमक संकलन करने वाला व्यक्ति स्वयं करता है। अनुसंधानकर्ता/मापनकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछता है, आवश्यकता होने पर प्रश्न को स्पष्ट करता है तथा प्राप्त उत्तरों को अनुसूची में अंकित करता जाता है। परन्तु कभी कभी अनुसूची की पूर्ति उत्तरदाता से भी कराई जाती है। वेबस्टर के अनुसार, अनुसूची एक औपचारिक सूची (Formal List) केटलॉग अथवा सूचनाओं की सूची होती है। अनुसूची को औपचारिक तथा प्रमाणीकृत जाँच कार्यो में प्रयुक्त होने वाली गणनात्मक प्रविधि के रूप में स्पष्ट किया जा सकता है जिसका उद्देश्य मात्रात्मक संमकों को संकलन कर व्यवस्थित एवं सुविधाजनक बनाना होता है। अवलोकन तथा साक्षात्कार को वस्तुनिष्ठ व प्रमाणिक बनाने में अनुसूचियाँ सहायक सिद्ध होती है। ये एक समय में किसी एक बात का अवलोकन या जानकारी प्राप्त करने पर बल देता है जिसके फलस्वरूप अवलोकन से प्राप्त जानकारी अधिक सटीक होती है। अनुसूची काफी सीमा तक प्रश्नावली के समान होती है तथा इन दोनों में विभेद करना एक कठिन कार्य होता है। अनुसूचियाँ अनेक प्रकार की हो सकती हैं जैसे अवलोकन अनुसूची(Observation Schedule), साक्षात्कार अनुसूची (Interview Schedule), दस्तावेज अनुसूची (Document Schedule), मूल्याकंन अनुसूची (Evaluation Schedule), निर्धारण अनुसूची (Rating Schedule) आदि। परन्तु यहाँ यह स्पष्ट करना उचित ही होगा कि ये अनुसूचियाँ परस्पर एक दूसरे से पूर्णतया अपवर्जित नहीं है। जैसे साक्षात्कार अनुसूची में अवलोकन के आधार पर पूर्ति किये जाने वाले पद भी हो सकते हैं। अवलोकन अनुसूची व्यक्तियों अथवा समूहों की क्रियाओं तथा सामाजिक परिस्थितियों को जानने के लिए एक समान आधार प्रदान करती है। इस प्राकर की अनुसूचियों की सहायता से एक साथ अनेक अवलोकनकर्ता एकरूपता के साथ बडे समूह से आँकड़े संकलित कर सकते हैं।

साक्षात्कार अनुसूचियों का प्रयोग अर्ध-प्रमाणीकृत तथा प्रमाणीकृत साक्षात्कारों में किया जाता है। ये साक्षात्कार को प्रमाणीकृत बनाने में सहायक होती है।

दस्तावेजों का प्रयोग व्यक्ति इतिहासों से सम्बन्धित दस्तावेजों तथा अन्य सामग्री से संमक संकलित करने हेतु किया जाता है। इस प्रकार की अनुसूचियों में उन्हीं बिन्दुओं/पदों को सम्मिलित किया जाता है जिनके सम्बन्ध में सूचनायें विभिन्न व्यक्ति इतिहासों से समान रूप से प्राप्त हो सके।

अतः अपराधी बच्चों के व्यक्ति इतिहासों का अध्ययन करने के लिए बनायी गयी अनुसूची में उन्हीं बातों को सम्मिलित किया जायेगा जो अध्ययन में सम्मिलित सभी बच्चों के व्यक्ति इतिहासों से ज्ञात हो सकती है। जैसे अपराध शुरू करने की आयु, माता-पिता का शिक्षा स्तर, परिवार का सामजिक आर्थिक स्तर, अपराधों की प्रकृति व आवृति आदि।

मूल्यांकन अनुसूची (Evaluation Schedule) का प्रयोग एक साथ अनेक स्थानों पर संचालित

समान प्रकार के कार्यक्रमों का मूल्यांकन करने के लिए आवश्यक सूचनायें संकलित करने के लिए किया जाता है। जैसे यू0जी0सी द्वारा अनेक विश्वविद्यालयों में एक साथ संचालित एकेडमिक स्टाफ कॉलेज योजना का मूल्यांकन करने के लिए विभिन्न एकेडमिक स्टाफ कॉलेजों के कार्यक्रम सम्बन्धी विभिन्न सूचनाओं को संकलित करने के लिए मूल्यांकन अनुसूची का प्रयोग किया जा सकता है।

निर्धारण अनुसूची (Rating Schedule) का प्रयोग किसी गुण की मात्रा का निर्धारण करने अथवा अनेक गुणों की तुलनात्मक उपस्थिति को निर्धारित करने के लिए किया जाता है। निर्धारण अनुसूची वास्तव में निर्धारण मापनी का ही एक रूप हैं।

1.5.5 प्रश्नावली (Questionnaire):

प्रश्नावली प्रश्नों का एक समूह है जिसे उत्तरदाता के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है तथा वह उनका उत्तर देता है। प्रश्नावली प्रमाणीकृत साक्षात्कार का लिखित रूप है। साक्षात्कार में एक एक करके प्रश्न मौखिक रूप में पूछे जाते हैं तथा उनका उत्तर भी मौखिक रूप में प्राप्त होता है जबकि प्रश्नावली प्रश्नों का एक व्यवस्थित संचयन है। प्रश्नावली एक साथ अनेक व्यक्तियों को दी जा सकती है जिसे कम समय, कम व्यय तथा कम श्रम में अनेक व्यक्तियों से प्रश्नों का उत्तर प्राप्त किया जा सकता है।

प्रश्नावली तैयार करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए-

(1) प्रश्नावली के साथ मुख्यपत्र अवश्य संलग्न करना चाहिए जिसमें प्रश्नावली को प्रशासित करने के उद्देश्य का स्पष्ट उल्लेख किया गया हो।

(2) प्रश्नावली के प्रारम्भ में आवश्यक निर्देश अवश्य देने चाहिए जिनमे उत्तर को अंकित करने की विधि स्पष्ट की गई हो।

(3) प्रश्नावली में सम्मिलित प्रश्न आकार की दृष्टि से छोटे और बोधगम्य होने चाहिए।

(4) प्रत्येक प्रश्न में केवल एक ही विचार को प्रस्तुत किया जाना चाहिए।

(5) प्रश्नावली में प्रयुक्त तकनीकी/जटिल शब्दों के अर्थ को स्पष्ट कर देना चाहिए।

(6) प्रश्न मे एक साथ दुहरी नकारात्मकता का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

(7)प्रश्नों के उत्तर देने में उत्तरदाता को सरलता होनी चाहिए।

(8)प्रश्नावली में सम्मिलित प्रश्नों के उत्तरों का स्वरूप इस प्रकार का होना चाहिए कि उनका संख्यात्मक विश्लेषण किया जा सके।

(9) प्रश्नावली का आकार बहुत अधिक बड़ा नहीं होना चाहिए।

प्रश्नावली प्रत्यक्ष संपर्क के द्वारा भी प्रशासित की जा सकती है तथा डाक द्वारा भेजकर भी आवश्यक सूचनायें प्राप्त की जा सकती है। उत्तर प्रदान करने के आधार पर प्रश्नावली दो प्रकार की हो सकती है। ये दो प्रकार प्रतिबंधित प्रश्नावली तथा मुक्त प्रश्नावली हैं। प्रतिबंधित प्रश्नावली में दिए गए कुछ उत्तरों में से किसी एक उत्तर का चयन करना होता है जबकि मुक्त प्रश्नावली में उत्तरदाता को अपने शब्दों में तथा अपने विचारानुकूल उत्तर देने की स्वतंत्रता होती है। जब प्रश्नावली में दोनों ही प्रकार के प्रश्न होते हैं तब उसे मिश्रित प्रश्नावली कहते हैं।

1.5.6 निर्धारण मापनी (Rating Scale):

निर्धारण मापनी किसी व्यक्ति के गुणों का गुणात्मक विवरण प्रस्तुत करती है। निर्धारण मापनी की

सहायता से व्यक्ति में उपस्थित गुणों की सीमा अथवा गहनता या आवृति को मापने का प्रयास किया जाता है। निर्धारण मापनी में उत्तर की अभिव्यक्ति के लिए कुछ संकेत(अथवा अंक) होते हैं। ये संकेत (अथवा अंक) कम से अधिक अथवा अधिक से कम के सातत्य में क्रमबद्ध रहते हैं। उत्तरकर्ता को मापे जाने वाले गुण के आधार पर इन संकेतों (अथवा अंको) में किसी एक ऐसे संकेत का चयन करना होता है जो छात्र में उपस्थित उस गुण की सीमा केा अभिव्यक्त कर सके। निर्धारण मापनी अनेक प्रकार के हो सकती है ये प्रकार क्रमशः चैकलिस्ट (Check List) , आंकिक मापनी(Numerical Scale) , ग्राफिक मापनी (Graphical Scale), क्रमिक मापनी (Ranking Scale), स्थानिक मापनी (Position Scale) तथा बाहय चयन मापनी (Forced-choice Scale) हैं।

जब किसी व्यक्ति में गुण की उपस्थिति या अनुपस्थिति का ज्ञान करना होता है तब चैकलिस्ट (Check List) का प्रयोग किया जाता है। चैकलिस्ट में कुछ कथन दिये होते हैं जो गुण की उपस्थिति/ अनुपस्थिति को इंगित करते हैं । निर्णायक को कथनों के सही या गलत होने की स्थिति को सही या गलत का चिन्ह लगाकर बताना होता है । निर्णायक के उत्तरों के आधार पर व्यक्ति में मौजूद गुण की मात्रा का पता लगाया जाता है।

आंकिक मापनी (Numerical Scale) में दिये गये कथनों के हॉ या नही के रूप में उत्तर नहीं होते हैं बल्कि प्रत्येक कथन के लिए कुछ बिन्दुओं (जैसे 3, 5, या 7 आदि) पर कथन के प्रति प्रयोज्यकर्ता की सहमति या असहमति की सीमा ज्ञात की जाती है। इस प्रकार से निर्णयकर्ता से प्रत्येक कथन के प्रति उसकी सहमति/असहमति की सीमा को जान लिया जाता है तथा इन सबका योग करके गुण की मात्रा को ज्ञात कर लिया जाता है।

ग्राफिक मापनी (Graphical Scale) वस्तुतः आंकिक मापनी के समान होती है। इसमें सहमति/असहमति की सीमाओं को कुछ बिन्दुओं से प्रकट न करके एक क्षैतिज रेखा जिसे सातत्य कहते हैं तथा जो सहमति/असहमति के देा छोरों को बताती है, पर निशाना लगाकर अभिव्यक्त किया जाता है इन क्षैतिज रेखाओं पर निर्णयकर्ता के द्वारा लगाये गये निशानों की स्थिति के आधार पर गुण की मात्रा का ज्ञान हो जाता है।

क्रमिक मापनी (Ranking Scale) में निर्णयकर्ता से किसी गुण की मात्रा के विषय में जानकारी न लेकर उपगुणों को क्रमबद्ध किया जाता है। व्यक्ति में उपस्थित गुणों की मात्रा के आधार पर इन गुणों को क्रमबद्ध किया जाता है। कभी-कभी इस मापनी की सहायता से विभिन्न वस्तुओं या गुणों के सापेक्षिक महत्व को भी जाना जाता है।

स्थानिक मापनी (Position Scale) की सहायता से विभिन्न वस्तुओं व्यक्तियों या कथनों को किसी समूह विशेष के संदर्भ में स्थानसूचक मान जैसे दशांक या शतांक आदि प्रदान किये जाते हैं।

बाह्य चयन मापनी (Forced-choice Scale) में प्रत्येक प्रश्न के लिए देा या दो से अधिक उत्तर होते हैं तथा व्यक्ति को इनमें से किसी एक उत्तर का चयन अवश्य करना पडता है।

1.5.7 प्रक्षेपीय तकनीक (Projective Technique):

प्रक्षेपीय तकनीक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता व्यक्ति के अचेतन पक्ष का मापक है। प्रक्षेपण से अभिप्राय उस अचेतन प्रकिया से है जिसमें व्यक्ति अपने मूल्यों, दृष्टिकोणों, आवश्यकताओं, इच्छाओं, संवेगों आदि को अन्य वस्तुओं अथवा अन्य व्यक्तियों के माध्यम से अपरोक्ष ढंग से व्यक्त करता है। प्रक्षेपीय तकनीक में व्यक्ति के सम्मुख किसी ऐसी उद्दीपक परिस्थिति को प्रस्तुत किया जाता है जिसमें वह अपने विचारों, दृष्टिकोणों, संवेगों, गुणों, आवश्यकताओं आदि को उस

परिस्थिति में आरोपित करके अभिव्यक्त कर दे। प्रक्षेपीय तकनीक में प्रस्तुत किए जाने वाले उद्दीपन अंसरचित प्रकृति के होते हैं तथा इन पर व्यक्ति के द्वारा की गयी क्रियाएं सही या गलत न होकर व्यक्ति की सहज व्याख्यायें होती है। प्रक्षेपीय तकनीकों में व्यक्ति द्वारा दी जाने वानी प्रतिक्रिया के आधार पर उन्हें पाँच भागों साहचर्य तकनीकें (Association Technique), रचना तकनीकें (Construction Technique), पूर्ति तकनीकें (Completion Technique) तथा अभिव्यक्त तकनीकें (Expression Technique) में बाँटा जा सकता है।

साहचर्य तकनीक (Association Technique) में व्यक्ति के सम्मुख कोई उद्दीपक प्रस्तुत किया जाता है तथा व्यक्ति को उस उद्दीपक से सम्बन्धित प्रतिक्रिया देखी होती है। व्यक्ति के द्वारा इस प्रकार से प्रस्तुत की गयी प्रतिक्रियाओं के विश्लेषण से उससे व्यक्तित्व को जाना जाता है। उद्दीपकों के आधार पर साहचर्य तकनीकें कई प्रकार की हो सकती है, जैसे शब्द साहचर्य तकनीक, चित्र साहचर्य तकनीक, तथा वाक्य साहचर्य तकनीक में क्रमशः शब्दों चित्रों या वाक्यों को प्रस्तुत किया जाता है तथा उसके ऊपर व्यक्ति की प्रतिक्रिया प्राप्त की जाती है।

रचना तकनीक (Construction Technique) में व्यक्ति के सामने कोई उद्दीपन प्रस्तुत कर दिया जाता है तथा उससे कोई रचना बनाने के लिए कहा जाता है । व्यक्ति के द्वारा तैयार की गयी रचना का विश्लेषण करके उसके व्यक्तित्व को जाना जाता है। प्रायः उद्दीपन के आधार पर कहानी लिखाकर या चित्र बनाकर इस तकनीक का प्रयोग किया जाता है।

पूर्ति तकनीक (Completion Technique) में किसी अधूरी रचना केा उद्दीपन की तरह से प्रस्तुत किया जाता है तथा व्यक्ति को उस अधूरी रचना को पूरा करना होता है। व्यक्ति के द्वारा अधूरी रचना में पूर्ति में प्रयुक्त किये जाने वाले शब्द या भावों को विश्लेषण कर उसके व्यक्तित्व का अनुमान लगाया जाता है। वाक्यपूर्ति या चित्रपूर्ति इस तकनीक के प्रयोग के कुछ ढंग है।

क्रम तकनीक में व्यक्ति के समक्ष उद्दीपन के रूप में कुछ शब्द, कथन, भावविचार, चित्र, वस्तुएं आदि रख दी जाती हैं तथा उससे उन्हें किसी क्रम में व्यवस्थित करने के लिए कहा जाता है।व्यक्ति के द्वारा बनाये गये क्रम के विश्लेषण से उसके सम्बन्ध में जानकारी मिलती है।

अभिव्यक्त तकनीक (Expression Technique) के अन्तर्गत व्यक्ति को प्रस्तुत किये गये उद्दीपन पर अपनी प्रतिक्रिया विस्तार से अभिव्यक्त करनी पड़ती है। व्यक्ति के द्वारा प्रस्तुत की गयी अभिव्यक्ति के विश्लेषण से उसके व्यक्तित्व व अन्य गुणों का पता चल जाता है।

1.5.8 समाजमिति (Sociometry):

यह एक ऐसा व्यापक पद है जो किसी समूह में व्यक्ति की पसन्द, अंतःक्रिया एवं समूह के गठन आदि का मापन करने वाले उपकरणों के लिए प्रयोग में लाया जाता है। दूसरे शब्दों में समाजमिति सामाजिक पसन्द तथा समूहगत विशेषताओं के मापन की एक विधि है। इस प्रविधि में व्यक्ति से कहा जाता है कि वह दिए गए के आधार पर एक या एक से अधिक व्यक्ति का चयन करें। जैसे कक्षा में आप किस के साथ बैठना पसन्द करेंगे, आप किसके साथ खेलना पसन्द करेंगे, आपे किसे मित्र बनाना पसन्द करेंगे। व्यक्ति इस प्रकार की एक या दो या तीन या अधिक पसन्द बता सकता है। इस प्रकार के समाजमितीय प्रश्नों के लिए प्राप्त उत्तरों से तीन प्रकार का समाजमितीय विश्लेषण (Sociometric Analysis) समाजमितीय मैट्रिक्स (Sociometric Matrix) सोशियोगा्रम (Sociogram) तथा समाजमितीय गुणांक (Sociometric Coefficient) किया जा सकता है। समाजमितीय मैट्रिक्स में समूह के सभी छात्रों के द्वारा इंगित की गई पसन्द को अथवा समूह की सामाजिक स्थिति को अंकों के रूप में व्यक्त किया जाता है। समाजमितीय गुणांक के अनेक प्रकार

हो सकते हैं।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

17. …………………सामाजिक पसन्द तथा समूहगत विशेषताओं के मापन की एक विधि है।

18. प्रक्षेपीय तकनीक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता व्यक्ति के ……………..पक्ष का मापक है।

19. ……………………….प्रमाणीकृत साक्षात्कार का लिखित रूप है।

20. …………………………..की पूर्ति संमक संकलन करने वाला व्यक्ति स्वयं करता है।

1.6 सारांश

आँकड़े दो प्रकार के यथा गुणात्मक आँकड़े (Quantitative Data) तथा मात्रात्मक आँकड़े (Qualitative Data) होते हैं।

गुणात्मक आँकड़े (Qualitative Data) : गुणात्मक आँकड़े गुण के विभिन्न प्रकारों को इंगित करते हैं। गुणात्मक आँकड़े, गुणात्मक चरों से सम्बन्धित होते हैं। उनके आधार पर समूह को कुछ स्पष्ट वर्गो या श्रेणियों में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक व्यक्ति इनमें से किसी एक वर्ग या श्रेणी का सदस्य होता है।

मात्रात्मक आँकड़े (Quantitative Data): चर के गुणों की मात्रा को मात्रात्मक आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त किया जाता है। इन आँकड़ों का संबंध मात्रात्मक चरों पर समूह के विभिन्न व्यक्ति भिन्न-भिन्न मात्रा में मान प्राप्त कर सकते हैं।

सतत् आँकड़े: सतत् आँकड़े वे आँकड़े हैं जिनके लिए किन्हीं भी दो मानों के बीच का प्रत्येक मान धारण करना संभव होता है।

असतत् आँकड़े: असतत् आँकड़े वे आँकड़े हैं जिनके लिए किन्हीं भी दो मानों के बीच का प्रत्येक मान धारण करना संभव नहीं होता है।

मापन की यथार्थता के आधार पर मापन के चार स्तर होते हैं। ये चार स्तर (1) नामित स्तर (Nominal Level), (2) क्रमित स्तर (Ordinal Level), (3) अन्तरित स्तर (Interval Level), तथा (4) आनुपातिक स्तर (Ratio Scales) हैं। मापन के इन चार स्तरों को मापन के चार पैमाने अर्थात् नामित पैमाना(Nominal Scale), क्रमित पैमाना (Ordinal Scale), अन्तरित पैमाना (Interval Scale) तथा अनुपाती पैमाना ((Ratio Scale) भी कहा जाता है।

नामित पैमाना (Nominal Scale) **:** यह सबसे कम परिमार्जित स्तर का मापन है। इस प्रकार का मापन किसी गुण अथवा विशेषता के नाम पर आधारित होता है। इसमें व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण अथवा विशेषता के प्रकार के आधार पर कुछ वर्गो अथवा समूहों में विभक्त कर दिया जाता है।

क्रमित पैमाना (Ordinal Scale): यह नामित मापन से कुछ अधिक परिमार्जित होता है। यह मापन वास्तव में गुण की मात्रा के आकार पर आधरित होता है। इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण के मात्रा के आधार पर कुछ ऐसे वर्गों में विभक्त कर दिया जाता है जिनमें एक खास अन्तर्निहित क्रम निहित होता है।

जिनमें एक स्पष्ट अन्तर्निहित क्रम निहित होता है।

अन्तरित पैमाना (Interval Scale): यह नामित व क्रमित मापन से अधिक परिमार्जित होता है। अंतरित मापन गुण की मात्रा अथवा परिमाण पर आधारित होता है । इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं में विद्यमान गुण की मात्रा को इस प्रकार ईकाइयों के द्वारा व्यक्त किया जाता है कि किन्हीं दो लगातार ईकाइयों में अन्तर समान रहता है।

अनुपातिक पैमाना (Ratio Scale): यह मापन सर्वाधिक परिमार्जित स्तर का मापन है। इस प्रकार के मापन में अन्तरित मापन के सभी गुणों के साथ-साथ परम शून्य (Absolute Zero) या वास्तविक शून्य (Real Zero) की संकल्पना निहित रहती है।

आँकड़े के संग्रहण के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न तकनीको को पाँच मुख्य भागों में बाँटा जा सकता है। ये पाँच भाग निम्नवत हैं-

(1) अवलोकन तकनीक (Observation Technique)

(2) स्व-आख्या तकनीक (Self Report Technique)

(3) परीक्षण तकनीक (Testing Technique)

(4) समाजमितीय तकनीक (Sociometric Technique)

(5) प्रक्षेपीय तकनीक (Projective Technique)

अवलोकन: अवलोकन व्यक्ति के व्यवहार के मापन की अत्यन्त प्राचीन विधि है। व्यक्ति अपने आस-पास घटित होने वाली विभिन्न क्रियाओं तथा घटनाओं का अवलोकन करता रहता है। मापन के एक उदाहरण के रूप में अवलोकन का संबंध किसी व्यक्ति अथवा छात्र के बाह्य व्यवहार को देखकर उसके व्यवहार का वर्णन करने से है।

परीक्षण: परीक्षण वे उपकरण हैं जो किसी व्यक्ति अथवा व्यक्तियों के किसी समूह के व्यवहार का क्रमबद्ध तथा व्यवस्थित ज्ञान प्रदान करते हैं। परीक्षण से तात्पर्य किसी व्यक्ति को ऐसी परिस्थितियों में रखने से है जो उसके वास्तविक गुणों को प्रकट कर दे। विभिन्न प्रकार के गुणों को मापने के लिए विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है।

साक्षात्कार : साक्षात्कार व्यक्तियों से सूचना संकलित करने का सर्वाधिक प्रचलित साधन है। विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों में इसका प्रयोग किया जाता रहा है। साक्षात्कार में किसी व्यक्ति से आमने सामने बैठकर विभिन्न प्रश्न पूछे जाते हैं तथा उसके द्वारा दिये गये उत्तर के आधार पर उसकी योग्यताओं का मापन किया जाता है।

अनुसूची : अनुसूची समंक संकलन हेतु बहुतायत से प्रयुक्त होने वाला एक मापन उपकरण है। इसका उपयोग विभिन्न प्रकार की सूचनाओं को प्राप्त करने के लिए किया जाता है। सामान्यतः अनुसूची की पूर्ति संमक संकलन करने वाला व्यक्ति स्वयं करता है। अनुसंधानकर्ता/मापनकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछता है, आवश्यकता होने पर प्रश्न को स्पष्ट करता है तथा प्राप्त उत्तरों को अनुसूची में अंकित करता जाता है।

प्रश्नावली : प्रश्नावली प्रश्नों का एक समूह है जिसे उत्तरदाता के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है तथा वह उनका उत्तर देता है। प्रश्नावली प्रमाणीकृत साक्षात्कार का लिखित रूप है। साक्षात्कार में एक एक करके प्रश्न मौखिक रूप में पूछे जाते हैं तथा उनका उत्तर भी मौखिक रूप में प्राप्त होता है जबकि प्रश्नावली प्रश्नों का एक [illegible] संप्रेषण है।

प्रश्नावली प्रश्नों का एक व्यवस्थित संचयन है।

निर्धारण मापनी : निर्धारण मापनी किसी व्यक्ति के गुणों का गुणात्मक विवरण प्रस्तुत करती है। निर्धारण मापनी की सहायता से व्यक्ति में उपस्थित गुणों की सीमा अथवा गहनता या आवृति को मापने का प्रयास किया जाता है। निर्धारण मापनी में उत्तर की अभिव्यक्ति के लिए कुछ संकेत(अथवा अंक) होते हैं। ये संकेत (अथवा अंक) कम से अधिक अथवा अधिक से कम के सातत्य में क्रमबद्ध रहते हैं।

प्रक्षेपीय तकनीक : प्रक्षेपीय तकनीक की सर्वाधिक महत्वपूर्ण विशेषता व्यक्ति के अचेतन पक्ष का मापक है। प्रक्षेपण से अभिप्राय उस अचेतन प्रकिया से है जिसमें व्यक्ति अपने मूल्यों, दृष्टिकोणों, आवश्यकताओं, इच्छाओं, संवेगों आदि को अन्य वस्तुओं अथवा अन्य व्यक्तियों के माध्यम से अपरोक्ष ढंग से व्यक्त करता है।

प्रक्षेपीय तकनीकों में व्यक्ति द्वारा दी जाने वानी प्रतिक्रिया के आधार पर उन्हें पाँच भागों साहचर्य तकनीकें (Association Technique), रचना तकनीकें (Construction Technique), पूर्ति तकनीकें (Completion Technique) तथा अभिव्यक्त तकनीकें (Expression Technique) में बाँटा गया है।

समाजमिति : यह एक ऐसा व्यापक पद है जो किसी समूह में व्यक्ति की पसन्द, अंतःक्रिया एवं समूह के गठन आदि का मापन करने वाले उपकरणों के लिए प्रयोग में लाया जाता है। दूसरे शब्दों में समाजमिति सामाजिक पसन्द तथा समूहगत विशेषताओं के मापन की एक विधि है।

1.7 शब्दावली

गुणात्मक आँकड़े (Qualitative Data) : गुणात्मक आँकड़े गुण के विभिन्न प्रकारों को इंगित करते हैं। गुणात्मक आँकड़े, गुणात्मक चरों से सम्बन्धित होते हैं। उनके आधार पर समूह को कुछ स्पष्ट वर्गो या श्रेणियों में बाँटा जा सकता है। प्रत्येक व्यक्ति इनमें से किसी एक वर्ग या श्रेणी का सदस्य होता है।

मात्रात्मक आँकड़े (Quantitative Data): चर के गुणों की मात्रा को मात्रात्मक आँकड़ों के माध्यम से व्यक्त किया जाता है। इन आँकड़ों का संबंध मात्रात्मक चरों पर समूह के विभिन्न व्यक्ति भिन्न-भिन्न मात्रा में मान प्राप्त कर सकते हैं।

सतत् आँकड़े: सतत् आँकड़े वे आँकड़े हैं जिनके लिए किन्हीं भी दो मानों के बीच का प्रत्येक मान धारण करना संभव होता है।

असतत् आँकड़े: असतत् आँकड़े वे आँकड़े हैं जिनके लिए किन्हीं भी दो मानों के बीच का प्रत्येक मान धारण करना संभव नहीं होता है।

नामित पैमाना (Nominal Scale) :सबसे कम परिमार्जित स्तर का मापन । इसमें व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण अथवा विशेषता के प्रकार के आधार पर कुछ वर्गो अथवा समूहों में विभक्त कर दिया जाता है।

क्रमित पैमाना (Ordinal Scale): इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं को उनके किसी गुण के मात्रा के आधार पर कुछ ऐसे वर्गों में विभक्त कर दिया जाता है जिनमें एक स्पष्ट अन्तर्निहित क्रम निहित होता है।

अन्तरित पैमाना (Interval Scale): नामित व क्रमित मापन से अधिक परिमार्जित। अंतरित मापन गुण की मात्रा अथवा परिमाण पर आधारित होता है। इस प्रकार के मापन में व्यक्तियों अथवा वस्तुओं में विद्यमान गुण की मात्रा को इस प्रकार ईकाइयों के द्वारा व्यक्त किया जाता है कि किन्हीं दो लगातार ईकाइयों में अन्तर समान रहता है।

अनुपातिक पैमाना (Ratio Scale): सर्वाधिक परिमार्जित स्तर का मापन। इस प्रकार के मापन में अन्तरित मापन के सभी गुणों के साथ-साथ परम शून्य (Absolute Zero) या वास्तविक शून्य (Real Zero) की संकल्पना निहित रहती है।

अवलोकन: अवलोकन का संबंध किसी व्यक्ति अथवा छात्र के बाह्य व्यवहार को देखकर उसके व्यवहार का वर्णन करने से है।

परीक्षण: परीक्षण से तात्पर्य किसी व्यक्ति को ऐसी परिस्थितियों में रखने से है जो उसके वास्तविक गुणों को प्रकट कर दे। विभिन्न प्रकार के गुणों को मापने के लिए विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का प्रयोग किया जाता है।

साक्षात्कार : साक्षात्कार में किसी व्यक्ति से आमने सामने बैठकर विभिन्न प्रश्न पूछे जाते हैं तथा उसके द्वारा दिये गये उत्तर के आधार पर उसकी योग्यताओं का मापन किया जाता है।

अनुसूची : एक मापन उपकरण जिसका उपयोग विभिन्न प्रकार की सूचनाओं को प्राप्त करने के लिए किया जाता है। सामान्यतः अनुसूची की पूर्ति संमक संकलन करने वाला व्यक्ति स्वयं करता है।

प्रश्नावली : प्रश्नावली प्रश्नों का एक समूह है जिसे उत्तरदाता के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है। प्रश्नावली प्रश्नों का एक व्यवस्थित संचयन है।

निर्धारण मापनी : निर्धारण मापनी किसी व्यक्ति के गुणों का गुणात्मक विवरण प्रस्तुत करती है। इसकी सहायता से व्यक्ति में उपस्थित गुणों की सीमा अथवा गहनता या आवृति को मापने का प्रयास किया जाता है।

प्रक्षेपीय तकनीक : व्यक्ति के अचेतन पक्ष का मापक है। प्रक्षेपण से अभिप्राय उस अचेतन प्रकिया से है जिसमें व्यक्ति अपने मूल्यों, दृष्टिकोणों, आवश्यकताओं, इच्छाओं, संवेगों आदि को अन्य वस्तुओं अथवा अन्य व्यक्तियों के माध्यम से अपरोक्ष ढंग से व्यक्त करता है।

समाजमिति : समूह में व्यक्ति की पसन्द, अंतःक्रिया एवं समूह के गठन आदि का मापन करने वाला उपकरण। समाजमिति सामाजिक पसन्द तथा समूहगत विशेषताओं के मापन की एक विधि है।

1.8 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. नामित 2. खण्डित 3. सतत् 4. क्रमित 5. अन्तरित 6. आभासी 7. अनुपातिक 8. अनुपातिक 9. क्रमित 10. अनुपातिक 11. प्रमाणीकृत 12. विश्वसनीयता (Reliability) 13. अप्रमापीकृत 14. सहभागिक 15. असहभागिक 16. असंरचित 17. समाजमिति 18. अचेतन 19. प्रश्नावली 20. अनुसूची

1.9 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.

2. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.

3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.

4. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.

5. Tuckman Bruce W. (1978). Conducting Educational Research New York : Harcout Bruce Jovonovich Inc.

6. Van Dalen, Deo Bold V. (1979). Understanding Educational Research, New York MC Graw Hill Book Co.

7. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास

8. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन

9. शर्मा, आर०ए० (2001) :शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ, आर०लाल० पब्लिकेशन्स

10. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

1.10 निबंधात्मक प्रश्न

1. आँकड़ों के प्रकारों का वर्णन कीजिए।
2. मापन के चारों पैमानों की विशेषताओं की व्याख्या कीजिए।
3. मापन के चारों पैमानों यथा नामित स्तर, क्रमित स्तर, अन्तरित स्तर, तथा आनुपातिक स्तर में विभेद कीजिए।
4. आँकड़े संग्रहण के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न तकनीकों को वर्गीकृत कर उनका वर्णन कीजिए।
5. आँकड़े (Qualitative Data) संग्रहण हेतु विभिन्न शोध उपकरणों की व्याख्या कीजिए।

इकाई संख्या:2 शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांत, शोध आँकड़ों की विश्वसनीयता व वैधता तथा इनसे संबंधित अन्य मुद्दे (General

Principles of the Construction of Research Tools, Reliability and Validity of Scores and other related issues)

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

2.2 उद्देश्य

2.3 शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांत

2.4 परीक्षण की योजना

2.5 एकांश लेखन

2.6 परीक्षण का प्रारम्भिक क्रियान्वयन या प्रयोगात्मक क्रियान्वयन

2.7 परीक्षण की विश्वसनीयता

2.7.1 विश्वसनीयता (Reliability) का अर्थ

2.7.2 विश्वसनीयता की विशेषताएँ:

2.7.3 विश्वसनीयता ज्ञात करने की विधियाँ

2.7.4 विश्वसनीयता को प्रभावित करने वाले कारक

2.7.5 मापन की मानक त्रुटि तथा परीक्षण की विश्वसनीयता

2.8 परीक्षण की वैधता का अर्थ

2.8.1 वैधता की विशेषताएँ

2.8.2 वैधता के प्रकार

2.8.3 वैधता ज्ञात करने की विधियाँ

2.8.4 वैधता को प्रभावित करने वाले कारक

2.8.5 विश्वसनीयता तथा वैधता में संबंध

2.9 परीक्षण का मानक

2.10 मैन्युअल तैयार करना तथा परीक्षण का पुनरूत्पादन करना

2.11 सारांश

2.12 शब्दावली

2.13 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

2.14 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

2.15 निबंधात्मक प्रश्न

2.1 प्रस्तावना:

शोध आँकड़ों के संकलन के लिये बहुत सारे शोध उपकरणों को प्रयोग में लाया जाता है। अधिकांश शैक्षिक अनुसंधानों में आँकड़ों के संकलन या तो प्रमाणित परीक्षणों के द्वारा या स्वयं निर्मित अनुसंधान-उपकरणों के द्वारा किया जाता है। इससे वस्तुनिष्ठ आँकड़े प्राप्त होते हैं जिसके द्वारा सही शोध निष्कर्ष तक पहुंचा जा सकता है। प्रदत्तों का संकलन, प्रश्नावली, निरीक्षण, साक्षात्कार, परीक्षण, तथा अनेक अन्य प्रविधियों द्वारा किया जाता है। इन शोध उपकरणों के निर्माण हेतु वैज्ञानिक सोपानों का अनुसरण किया जाता है ताकि इनके द्वारा प्राप्त आँकड़े की विश्वसनीयता व वैधता बनी रहे। प्रस्तुत इकाई में आप इन शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांत व शोध आँकड़ों की विश्वसनीयता व वैधता तथा इनसे सम्बंधित अन्य मुद्दे का बृहत रूप से अध्ययन करेंगे।

2.2 उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांतों को स्पष्ट कर सकेंगे।
- शोध उपकरणों के निर्माण के प्रमुख पदों को नामांकित कर सकेंगे।
- शोध उपकरणों के निर्माण के प्रमुख पदों का वर्णन कर सकेंगे।
- विश्वसनीयता की प्रकृति को बता पायेंगें।
- वैधता के संप्रत्यय की व्याख्या कर सकेंगे।
- विश्वसनीयता व वैधता के मध्य संबंधों की व्याख्या कर सकेंगे।
- विश्वसनीयता को प्रभावित करने वाले कारक की व्याख्या कर सकेंगे।
- वैधता को प्रभावित करने वाले कारक की व्याख्या कर सकेंगे।
- विश्वसनीयता के प्रकारों का वर्णन कर सकेंगे।
- वैधता के प्रकारों का वर्णन कर सकेंगे।

2.3 शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांत (General Principles of the Construction of Research Tools):

व्यावहारिक विज्ञान के विषयों जैसे मनोविज्ञान (Psychology), समाजशास्त्र, व शिक्षा (education) के शोध के निष्कर्ष की विश्वसनीयता व वैधता शोध उपकरणों यथा प्रश्नावली, निरीक्षण, साक्षात्कार, परीक्षण, तथा अनेक अन्य प्रविधियों पर निर्भर करता है। शोध उपकरणों के अभाव में व्यावहारिक विज्ञान से संबंधित विषयों में अर्थपूर्ण ढंग से शोध नहीं किया जा सकता है। अत: यह आवश्यक हैं कि आप उन सभी प्रमुख चरणों (Steps) से अवगत हों जिनके माध्यम से एक शैक्षिक शोध उपकरण का निर्माण किया जाता है। यहाँ सुविधा के लिए शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण (test) निर्माण के प्रमुख चरणों (Steps) को स्पष्ट किया गया है। इसके अतिरिक्त अन्य शैक्षिक शोध उपकरणों के निर्माण में भी यही सामान्य सिद्धांत को ध्यान में रखा जाता है। शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण (test) निर्माण के प्रमुख चरणों (Steps) को निम्नांकित सात भागों में बॉटा गया है-

1. परीक्षण की योजना (Planning of the test)
2. एकांश – लेखन (Item writing)
3. परीक्षण की प्रारम्भिक क्रियान्वयन या प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (Preliminary tryout or Experimental tryout of the test)

4. परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability of the test)
5. परीक्षण की वैधता (Validity of the test)
6. परीक्षण का मानक (Norms of the test)
7. परीक्षण का मैन्युअल तैयार करना एवं पुनरूत्पादन करना (Preparation of manual and reproduction of test)

शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण (test) निर्माण के प्रमुख चरणों (Steps) की व्याख्या निम्नांकित है-

2.4 परीक्षण की योजना (Planning of the test):

किसी भी मनोविज्ञानिक या शैक्षिक परीक्षण के निर्माण (Construction) में सबसे पहला कदम एक योजना (Planning) बनाना होता है। इस चरण में परीक्षणकर्ता (Test constructor) कई बातों का ध्यान रखता है। जैसे, वह यह निश्चित करता है कि परीक्षण का उद्देश्य (Objectives) क्या है, इसमें एकांशों (Items) की संख्या कितनी होनी चाहिए, एकांश (item) का स्वरूप (nature) अर्थात उसे वस्तुनिष्ठ (objective) या आत्मनिष्ठ (subjective) होना चाहिए, किस प्रकार का निर्देश (instruction) दिया जाना चाहिए, प्रतिदर्श (sampling) की विधि क्या होनी चाहिए, परीक्षण की समय सीमा (time limit) कितनी होनी चाहिए, साँख्यिकीय विश्लेषण (Statistical analysis) कैसे की जानी चाहिए, आदि-आदि। इस चरण में परीक्षण निर्माता (test constructor) इस बात का निर्णय करता है कि परीक्षण निर्माण हो जाने के बाद वह कितनी संख्या में उस परीक्षण का निर्माण करेगा।

2.5 एकांश लेखन (Item writing):

परीक्षण की योजना तैयार कर लेने के बाद परीक्षण निर्माता (test constructor) एकांशों (items) को लिखना प्रारंभ कर देता है। बीन (Bean, 1953) के शब्दों में, एकांश एक ऐसा प्रश्न या पद होता है जिसे छोटी इकाईयों में नहीं बाँटा जा सकता है।

एकांश-लेखन (item writing) एक कला (art) है। ऐसे तो उत्तम एकांश लिखने के लिए कोई निश्चित नियम नहीं है, फिर भी एकांश-लेखन बहुत हद तक परीक्षण निर्माणकर्ता के कल्पना, अनुभव, सूझ, अभ्यास आदि कारकों पर निर्भर करता है। इसके बावजूद भी शोधकर्ताओं ने कुछ ऐसे अपेक्षित गुणों (requisites) की चर्चा की है जिससे शोधकर्ता को उपयुक्त एकांश (appropriate items) लिखने में मदद मिलती है। ऐसे कुछ अपेक्षित गुणों (requisites) निम्नवत हैं –

i. एकांश-लेखक (item writer) को विषय-वस्तु (Subject-Matter) का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, जिस क्षेत्र में परीक्षण का निर्माण किया जा रहा है। उसे उस क्षेत्र के सभी तथ्यों (facts) नियमों, भ्रांतियों (fallacies) का पूर्णज्ञान होना चाहिए।

ii. एकांश-लेखक (item writer) को उन व्यक्तियों के व्यक्तित्व से पर्णत: वाकिफ होना चाहिए, जिनके लिए परीक्षण का निर्माण किया जा रहा है। इन व्यक्तियों की क्षमताओं, रूझानों आदि से अवगत रहने पर एकांश लेखक (item writer) के लिए उनके मानसिक स्तर के अनुरूप एकांश लिखना संभव हो पाता है।

iii. एकांश लेखक (item writer) को एकांश (items) के विभिन्न प्रकारों (types) जैसे आत्मनिष्ठ प्रकार (subjective type) वस्तुनिष्ठ प्रकार (objective type) तथा फिर वस्तुनिष्ठ प्रकार के कई उप प्रकार (subtype) जैसे द्विवैकल्पिक एकांश (two alternative item) तथा बहुविकल्पी एकांश (Multiple choice item) जैसे मिलान

एकांश (matching) आदि के लाभ एवं हानियों से पूर्णत: अवगत होना चाहिए।

iiii. एकांश-लेखक (item writer) का शब्दकोष (Vocabulary) बड़ा होना चाहिए। वह एक ही शब्द के कई अर्थ से अवगत हो ताकि एकांश लेखन (item writing) में किसी प्रकार की कोई सम्भ्रान्ति (Confusion) नहीं हो।

v. एकांश-लेखन कर लेने के बाद एकांशों (items) को विशेषज्ञों (experts) के एक समूह को सुपुर्द कर देना चाहिए। उनके द्वारा की गई आलोचनाओं (criticism) एवं दिए गये सुझावों (suggestions) के आलोक में एकांश के स्वरूप में या संरचना (structure) में यथासंभव परिवर्तन कर लेना चाहिए।

vi. एकांश-लेखक में कल्पना करने की शकित (Imaginative power) की प्रचुरता होनी चाहिए।

2.6 परीक्षण का प्रारम्भिक क्रियान्वयन या प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (Preliminary tryout of Experimental tryout of the test):

शैक्षिक शोध परीक्षण के निर्माण में तीसरा महत्वपूर्ण कदम परीक्षण के प्रारंभिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) का होता है जिसे प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (experimental tryout) भी कहा जाता है। जब परीक्षण के एकांशों (items) की विशेषज्ञो (experts) द्वारा आलोचनात्मक परख कर ली जाती है तो इसके बाद उसका कुछ व्यक्तियों पर क्रियान्वयन (administer) किया जाता है। ऐसे क्रियान्वयन को प्रयोगात्मक क्रियान्वयन कहा जाता है। ऐसे प्रयोगात्मक क्रियान्वयन की सफलता के लिए यह अनिवार्य है कि चुने गये व्यक्तियों का प्रतिदर्श (sample) का स्वरूप (nature) ठीक वैसा ही हो जिसके लिए परीक्षण बनाया जा रहा हो। कोनरेड (Conrad, 1951) के अनुसार प्रारम्भिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) कुछ खास-खास उद्दश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है। इन उद्देश्यों में निम्नांकित प्रधान हैं-

i. एकांशों में यदि कोई अस्पष्टता, अपर्याप्तता (inadequacies) अर्थहीनता आदि रह गई हो तो इसका आसानी से पता प्रांम्भिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) से कर लिया जाता है।

ii. इससे प्रत्येक एकांश की कठिनता स्तर (Difficulty value) का पता चल जाता है, प्रत्येक एकांश पर जितने व्यक्तियों द्वारा सही उत्तर दिया जाता है, उसका अनुपात (proportion) ही एकांश की कठिनता स्तर (difficulty level) होता है।

iii. इससे प्रत्येक एकांश (item) की वैधता (validity) का पता भी लग जाता है। एकांश की वैधता से तात्पर्य उत्तम व्यक्तियों (superior individual) तथा निम्न व्यक्तियों (inferior individual) में विभेद करने की क्षमता से होता हैं। यही कारण हैं कि इसे एकांश (item) का विभेदी सूचकांक (discriminatory index) भी कहा जाता है।

iiii. इससे परीक्षण की समय सीमा निर्धारित करने में मदद मिलती है।

v. परीक्षण को उपयुक्त लम्बाई (Length) नियत करने में मदद मिलती है।

vi. प्रारंभिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) के आधार पर एकांशों (items) के बीच अन्तरसहसंबंध (inter correlation) ज्ञात करने में भी मदद मिलती है।

vii. परीक्षण को साथ दिये जाने वाले मानक निर्देश (Standard instruction) की अस्पष्टता, अर्थहीनता, यदि कोई हो आदि की जाँच में भी इससे मदद मिलती है।

प्रारम्भिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) द्वारा इन विभिन्न तरह के उद्देश्यों की पूर्ति के लिए कोनरोड (Conrad, 1951) ने कम से कम तीन बार परीक्षण को नये-नये प्रतिदर्श (sample) पर क्रियान्वयन (administer) करने की सिफारिश की है। पहले क्रियान्वयन के लिए व्यक्तियों की संख्या 100 से कम नहीं होनी चाहिए। इसे प्राक-क्रियान्वयन (pre-tryout) कहा जाता है जिसका उद्देश्य एकांशों तथा निर्देश (instruction) में छिपी किसी तरह के अस्पष्टता (vagueness) का पता लगाना होता है। दूसरे क्रियान्वयन (second tryout) के लिए व्यक्तियों की संख्या 400 के करीब या कम से कम 370 अवश्य होनी चाहिए। इसे खास क्रियान्वयन (tryout proper) कहा जाता है। इसका उद्देश्य एकांश विश्लेषण (item analysis) के लिए ऑकड़े इकट्ठा करना होता है। एकांश विश्लेषण करने से परीक्षण निर्माता (test constructor) को अन्य बातों के अलावा प्रत्येक एकांश के बारे में दो तरह के सूचकांक (indices) का पता चल जाता है –**कठिनाई सूचकांक (difficulty index)** तथा **विभेद सूचकांक (discrimination index)**। कठिनाई सूचकांक से यह पता चल जाता है कि एकांश व्यक्ति के लिए कठिन है या हल्का है तथा विभेदन सूचकांक से यह पता चल जाता है कि कहॉं तक एकांश उत्तम व्यक्तियों और निम्न व्यक्तियों में अन्तर कर रहा है। इन दोनों महत्वपूर्ण सूचकांक के अलावा एकांश विश्लेषण (item analysis) द्वारा प्रत्येक एकांश के उत्तर के रूप में दिए गये कई विकल्पों (alternatives) की प्रभावशीलता (effectiveness) का भी पता चल जाता है। तीसरा क्रियान्वयन (third tryout) कुछ व्यक्तियों पर इस उद्देश्य से किया जाता है कि अन्त में उन त्रुटियों (errors) या अस्पष्टता दूर कर ली जाए जो प्रथम दो क्रियान्वयनों में भी दूर नहीं हो सके थे।

इस तरह से यह तीसरा क्रियान्वयन एक तरह का ड्रेस रिहर्सल (dress rehearsal) का कार्य करता है।

एकांश विश्लेषण (item analysis) कर लेने के बाद परीक्षण अपने अंतिम रूप (final form) में आ जाता है। अकसर देखा गया है कि एकांश विश्लेषण के बाद वैसे एकांश अपने आप छॅंट जाते हैं जो परीक्षण के उद्देश्यों के अनुरूप नहीं होते हैं। इसका मतलब यह हुआ कि एकांश विश्लेषण के बाद परीक्षण की लंबाई (length) कम हो जाती है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

---

1. ....से तात्पर्य उत्तम व्यक्तियों (superior individual) तथा निम्न व्यक्तियों (inferior individual) में विभेद करने की क्षमता से होता हैं।

2. एकांश की वैधता को एकांश (item) का ....भी कहा जाता है।

3. .... से यह पता चल जाता है कि एकांश व्यक्ति के लिए कठिन है या हल्का है।

4. ....से यह पता चल जाता है कि कहॉं तक एकांश उत्तम

व्यकितयों और निम्न व्यक्तियों में अन्तर कर रहा है।

5. ....एक ऐसा प्रश्न या पद होता है जिसे छोटी इकाईयों में नहीं बाँटा जा सकता है।

2.7 परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability of the test):

शैक्षिक परीक्षण निर्माण करने में यह चौथा महत्वपूर्ण चरण है जहाँपरीक्षण की विश्वसनीयता (reliability) ज्ञात किया जाता है। विश्वसनीयता से तात्पर्य परीक्षण प्राप्तांक (test scores) की संगति (consistency) से होता है। इस संगति में कालिक संगति (temporal constancy) तथा आंतरिक संगति (internal consistency) दोनों ही शामिल होते हैं।

2.7.1 विश्वसनीयता का अर्थ (Meaning of Reliability):

परीक्षण की विश्वसनीयता का संबंध उससे मिलने वाले प्राप्तांकों में स्थायित्व से है। परीक्षण की 'विश्वसनीयता' का संबंध 'मापन की चर त्रुटियों' से है। परीक्षण की यह विशेषता बताती है कि परीक्षण किस सीमा तक चर त्रुटियों से मुक्त है। विश्वसनीयता का शाब्दिक अर्थ विश्वास करने की सीमा से है। अत: विश्वसीयता परीक्षण वह परीक्षण है जिस पर विश्वास किया जा सके। यदि किसी परीक्षण का प्रयोग बार-बार उन्हीं छात्रों पर किया जाये तथा वे छात्र बार-बार समान अंक प्राप्त करें, तो परीक्षण को विश्वसनीय कहा जाता है। यदि परीक्षण से प्राप्त अंकों में स्थायित्व है तो परीक्षण को विश्वसनीय परीक्षण के रूप में स्वीकार किया जाता है।

अनास्तेसी के अनुसार, 'परीक्षण की विश्वसनीयता से अभिप्राय भिन्न-भिन्न अवसरों पर या समतुल्य पदों के भिन्न-भिन्न विन्यासों पर, किसी व्यक्ति के द्वारा प्राप्त अंकों की संगति से है।'

गिलफर्ड के अनुसार, 'विश्वसनीयता परीक्षण प्राप्तांकों में सत्य प्रसरण का अनुपात है।'

मार्शल एवं हेल्स के अनुसार, 'परीक्षण प्राप्तांकों के बीच संगति की मात्रा को ही विश्वसनीयता कहा जाता है।'

2.7.2 विश्वसनीयता की विशेषताएँ:

उपर्युक्त परिभाषाओं के आधार पर परीक्षण की विश्वसनीयता की विशेषताएँ निम्नवत हैं -

i. विश्वसनीयता किसी भी परीक्षण प्राप्तांक का एक प्रमुख गुण होता है।

ii. विश्वसनीयता से तात्पर्य प्राप्तांकों की परिशुद्धता से है।

iii. विश्वसनीयता से तात्पर्य प्राप्तांक की संगति से होता है जो उनके पुनरूत्पादकता के रूप में दिखलाई देता है।

iiii. परीक्षण प्राप्तांक की विश्वसनीयता का अर्थ आंतरिक संगति (Internal consistency) से होता है।

v. विश्वसनीयता परीक्षण का आत्म सह-संबंध होता है।

vi. विश्वसनीयता का संबंध मापन की चर त्रुटियों से होता है

vii. विश्वसनीयता गुणांक को सत्य प्रसरण व कुल प्रसरण का अनुपात माना जाता है।

viii. विश्वसनीयता को स्थिरता गुणांक (Coefficients of stability), समतुल्यता गुणांक (Coefficient of equivalence) तथा सजातीयता गुणांक (coefficient of Homogeneity) के रूप में भी परिभाषित किया जाता है।

2.7.3 विश्वसनीयता ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Estimating Reliability):

विश्वसनीयता प्राप्त करने की पाँच मुख्य विधियाँ हैं –

1. परीक्षण-पुनर्परीक्षण विश्वसनीयता विधि (Test-retest reliability)
2. समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता (Equivalence forms Reliability)
3. अर्द्धविच्छेद विश्वसनीयता (Split-Halves Reliability)
4. तार्किक समतुल्यता विश्वसनीयता (Rational-Equivalence Reliability)
5. होय्ट विश्वसनीयता (Hoyt Reliability)

1. **परीक्षण-पुनर्परीक्षण विश्वसनीयता विधि (Test-retest reliability):** इस विधि में परीक्षण को दो बार छात्रों के किसी समूह पर प्रशासित किया जाता है, जिससे प्रत्येक छात्र के लिए दो प्राप्तांक प्राप्त हो जाते हैं। परीक्षण के प्रथम प्रशासन तथा परीक्षण के द्वितीय प्रशासन से प्राप्त अंकों के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना कर ली जाती है। यह सहसंबंध गुणांक (r) ही परीक्षण के लिए परीक्षण-पुन:परीक्षण विश्वसनीयता गुणांक कहलाता है। इस प्रकार से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक को स्थिरता गुणांक (coefficient of stability) भी कहा जाता है।

2. **समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता (Equivalence forms Reliability)**: यदि किसी परीक्षण की दो से अधिक समतुल्य प्रतियॉं इस ढंग से तैयार की जाती है कि उन पर प्राप्त अंक एक दूसरे के समतुल्य हों , तब समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता की गणना की जाती है। समतुल्य विश्वसनीयता गुणांक ज्ञात करने के लिए प्रत्येक छात्र को परीक्षण की दो समतुल्य प्रतियॉं, एक के बाद दी जाती है तथा प्रत्येक छात्र के लिए दो प्राप्तांक प्राप्त कर लिए जाते हैं। इन दो समतुल्य प्रारूपों पर छात्रों के द्वारा प्राप्त अंकों के बीच सहसंबंध गुणांक (r) ही समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता कहलाता है। इस विधि से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक को समतुल्यता गुणांक (Coefficient of Equivalence) भी कहते हैं।

3. **अर्द्धविच्छेद विश्वसनीयता (Split Halves Reliability) :** किसी भी परीक्षण को दो समतुल्य भागों में विभक्त करके विश्वसनीयता गुणांक ज्ञात किया जाता है। परीक्षण के दोनों भागों के लिए प्रत्येक छात्र के लिए दो अलग-अलग प्राप्तांक प्राप्त किये जाते हैं। जिनके मध्य सहसंबंध गुणांक (r) की गणना की जाती है। पूर्ण परीक्षण की विश्वसनीयता की गणना के लिए स्पीयरमैन – ब्रॉउन प्रोफेसी सूत्र का प्रयोग करते हैं, जो इस प्रकार है = 2r /1+r

4. **तार्किक समतुल्यता विश्वसनीयता (Rational-Equivalence Reliability)**: यह विधि परीक्षण की सजातीयता का मापन करती है इसलिए कूडर रिचार्डसन विधि से विश्वसनीयता गुणांक को सजातीयता गुणांक या आन्तरिक संगति गुणांक भी कहा जाता है। कूडर रिचार्डसन ने इस विधि के प्रयोग के लिए अनेक सूत्रों का प्रतिपादन किया, जिनमें से दो सूत्र **के०आर० 20** तथा **के०आर० 21** अधिक प्रचलित है।

5. **होय्ट विश्वसनीयता (Hoyt Reliability)**: होय्ट ने प्रसरण (Variance) को विश्वसनीयता गुणांक निकालने का आधार माना है। होय्ट के अनुसार कुल प्रसरण को तीन भागों में बाँटा जा सकता है। ये तीन भाग-सत्य प्रसरण (total variance), पद प्रसरण (item Variance) तथा त्रुटि प्रसरण (error variance) हैं। सत्य प्रसरण छात्रों या व्यक्तियों के वास्तविक अंकों का प्रसरण है। पद प्रसरण पदों या प्रश्नों पर प्राप्तांकों के लिए प्रसरण है। त्रुटि प्रसरण चर त्रुटि के अंकों का प्रसरण है। प्रसरण विश्लेषण साँख्यिकीय तकनीक का प्रयोग कर होय्ट विश्वसनीयता को ज्ञात की जा सकती है। यह विधि विश्वसनीयता गुणांक निकालने की एक जटिल विधि है।

2.7.4 विश्वसनीयता को प्रभावित करने वाले कारक (Factors Affecting the Reliability):

परीक्षण का विश्वसनीयता गुणांक परीक्षण से संबंधित अन्य अनेक विशेषताओं से संबंधित रहता है। विश्वसनीयता को प्रभावित करने वाले कुछ प्रमुख कारक निम्नवत हैं-

i. परीक्षण की लंबाई तथा परीक्षण की विश्वसनीयता के बीच धनात्मक सह-संबंध पाया जाता है। परीक्षण जितना अधिक लंबा होता है, उसका विश्वसनीयता गुणांक उतना ही अधिक होता है।

ii. जिस परीक्षण में सजातीय प्रश्नों की संख्या अधिक होती है, तो उसकी विश्वसनीयता अधिक होती है जबकि अधिक विजातीय प्रश्न वाले परीक्षण की विश्वसनीयता कम होती है।

iii. परीक्षण में अधिक विभेदक क्षमता (Discriminative Power) वाले प्रश्नों के होने से उसकी विश्वसनीयता अधिक होती है।

iiii. औसत कठिनाई स्तर वाले प्रश्नों से युक्त परीक्षण की विश्वसनीयता अधिक होती है जबकि अत्यधिक सरल अथवा अत्यधिक कठिन प्रश्नों वाले परीक्षण की विश्वसनीयता कम होती है।

v. योग्यता के अधिक प्रसार वाले समूह से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक अधिक होता है जबकि योग्यता में लगभग समान छात्रों के समूह से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक कम होता है।

vi. गति परीक्षण (Speed Test) की विश्वसनीयता अधिक होती है, जबकि शक्ति परीक्षण (Power Test) की विश्वसनीयता कम होती है।

vii. वस्तुनिष्ठ परीक्षण, विषयनिष्ठ परीक्षण की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय होते हैं।

viii. समतुल्य परीक्षण विधि से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक, परीक्षण-पुर्नपरीक्षण विधि से प्राप्त गुणांक से कम आता है तथा इसे प्राय: वास्तविक विश्वसनीयता

की निम्न सीमा माना जाता है। इसके विपरीत अर्द्धविच्छेद विधि से विश्वसनीयता का मान अधिक आता है तथा इसे विश्वसनीयता की उच्च सीमा माना जाता है।

2.7.6 मापन की मानक त्रुटि तथा परीक्षण की विश्वसनीयता (Standard Error of Measurement and Test Reliability):

त्रुटि प्राप्तांकों के मानक विचलन को मापक की मानक त्रुटि कहते हैं तथा इसे σ_e से व्यक्त करते हैं। मापन की मानक त्रुटि (σ_e) तथा विश्वसनीयता गुणांक (r) में घनिष्ठ संबंध होता है। इन दोनों के संबंध को निम्न समीकरण से प्रकट किया जा सकता है –

$\sigma_e = \sigma \sqrt{1-r}$ जहाँ σ प्राप्तांकों का मानक विचलन है। मापन की मानक त्रुटि प्राप्तांकों की यथार्थता को बताता है।

विश्वसनीयता सूचकांक (Index of Reliability) : परीक्षण पर प्राप्त कुल अंकों (X) तथा सत्य प्राप्तांकों (T) के बीच सहसंबंध गुणांक को विश्वसनीयता सूचकांक कहते हैं। उसका मान विश्वसनीयता गुणांक के वर्गमूल के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि विश्वसनीयता गुणांक का वर्गमूल ही विश्वसनीयता सूचकांक है या दूसरे शब्दों में विश्वसनीयता सूचकांक का वर्ग ही विश्वसनीयता गुणांक है।

$rxt = \sqrt{r}$ $\quad$ rxt = विश्वसनीयता सूचकांक

r = विश्वसनीयता गुणांक

विश्वसनीयता सूचकांक यह बताता है कि प्राप्तांकों तथा सत्य प्राप्तांकों के बीच क्या संबंध है। उदाहरण के लिए यदि विश्वसनीयता गुणांक का मान .81 है तो सूचकांक का मान .90 होगा जो प्राप्तांकों तथा सत्य प्राप्तांकों के सहसंबंध का द्योतक है। विश्वसनीयता सूचकांक का दूसरा कार्य परीक्षण की वैधता की सीमा को बताना है। वैधता का मान विश्वसनीयता गुणांक के वर्गमूल के बराबर या इससे कम ही हो सकता है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

6. यदि विश्वसनीयता गुणांक का मान .36 है तो विश्वसनीयता सूचकांक का मान ……………………… होगा।
7. ……………………………………….. का मान विश्वसनीयता गुणांक के वर्गमूल के बराबर होता है।
8. ……………………..की विश्वसनीयता अधिक होती है, जबकि शक्ति परीक्षण (Power Test) की विश्वसनीयता कम होती है।
9. परीक्षण में अधिक विभेदक क्षमता (Discriminative Power) वाले प्रश्नों के होने से उसकी विश्वसनीयता ………………………….होती है।
10. योग्यता के अधिक प्रसार वाले समूह से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक ……………………होता है।

2.8 परीक्षण की वैधता (Validity of the test) का अर्थ:

2.8 परीक्षण की वैधता (Validity of the test) का अर्थ:

किसी भी शैक्षिक परीक्षण की विश्वसनीयता ज्ञात कर लेने के बाद उसकी वैधता (Validity) ज्ञात की जाती है।

परीक्षण वैधता (Test Validity): किसी भी अच्छे परीक्षण को विश्वसनीय होने के साथ वैध होना आवश्यक है। वैधता का सीधा संबंध परीक्षण के उद्देश्यपूर्णता से है। जब परीक्षण अपने उद्देश्य की पूर्ति करता है, तब ही उसे वैध परीक्षण कहते हैं तथा परीक्षण की इस विशेषता को वैधता कहते हैं। वास्तव में परीक्षण कुशलता (Test efficiency) का पहला प्रमुख अवयव विश्वसनीयता तथा दूसरा प्रमुख अवयव वैधता होती है। परीक्षण की वैधता से तात्पर्य परीक्षण की उस क्षमता से होता है जिसके सहारे वह उस गुण या कार्य को मापता है जिसे मापने के लिए उसे बनाया गया था। यदि कोई परीक्षण अभिक्षमता मापने के लिए बनाया गया है और वास्तव में उससे सही-सही अर्थों में व्यक्ति की अभिक्षमता की माप हो पाती है, तो इसे एक वैध परीक्षण माना जाना चाहिए। वैधता को बहुत सारे शोध व परीक्षण विशेषज्ञों ने अलग-अलग ढंग से परिभाषित किया है जो निम्नवत है –

गुलिकसन के अनुसार, 'वैधता किसी कसौटी के साथ परीक्षण का सहसंबंध है।'

क्रोनबैक के अनुसार, 'वैधता वह सीमा है, जिस सीमा तक परीक्षण वही मापता है, जिसके लिए इसका निर्माण किया गया है।'

एनास्टेसी एवं उर्विना के अनुसार, 'परीक्षण वैधता से तात्पर्य इस बात से होता है कि परीक्षण क्या मापता है, और कितनी बारीकी से मापता है।'

गे के अनुसार, ''वैधता की सबसे सरल परिभाषा यह है कि यह वह मात्रा है जहाँतक परीक्षण उसे मापता है जिसे मापने की कल्पना की जाती है।'

फ्रीमैन के शब्दों में, 'वैधता सूचकांक उस मात्रा को व्यक्त करता है जिस मात्रा में परीक्षण उस लक्ष्य को मापता है, जिसके लिए इसे बनाया गया है।'

गैरेट के अनुसार, 'किसी परीक्षण या किसी मापन उपकरण की वैधता, उस यथार्थता पर निर्भर करती है जिससे वह उस तथ्य को मापता है, जिसके लिए इसे बनाया गया है।'

आर०एल० थार्नडाइक के अनुसार, 'कोई मापन विधि उतनी ही वैध है जितनी यह उस कार्य में सफलता के किसी मापन से संबंधित है जिसके पूर्वकथन के लिए यह प्रयुक्त हो रही है।'

2.8.1 वैधता की विशेषताएँ:

उपर्युक्त परिभाषाओं के आधार पर वैधता की निम्नलिखित विशेषताएँ सुनिश्चित की जा सकती हैं-

i. वैधता एक सापेक्ष पद होता है अर्थात कोई भी परीक्षण हर कार्य या गुण के मापने के लिए वैध नहीं होता है।

ii. वैधता से परीक्षण की सत्यता का पता चलता है।

iii. वैधता का संबंध परीक्षण के उद्देश्य से होता है।

iiii. वैधता किसी भी परीक्षण का बाह्य कसौटी के साथ सहसंबंध को दर्शाता है।

v. वैधता किसी भी प्रमाणिक परीक्षण की एक महत्वपूर्ण विशेषता होती है।

2.8.2 वधता क प्रकार (Types of validity) :

विभिन्न शोध विशेषज्ञों व मापनविदों ने वैधता के भिन्न-भिन्न वर्गीकरण दिये हैं । कुछ प्रमुख वर्गीकरणों के आधार पर वैधता के मुख्य प्रकारों की चर्चा यहाँ की जा रही है-

i. **विषयगत वैधता (Content Validity)** – जब परीक्षण की वैधता स्थापित करने के लिए परीक्षण परिस्थितियों तथा परीक्षण व्यवहार का सावधानीपूर्वक विश्लेषण करके परीक्षण द्वारा मापी जा रही विशेषता/योग्यता के संबंध में प्रमाण एकत्रित किए जाते हैं तो इसे विषयगत वैधता कहते हैं। विषयगत वैधता कई प्रकार की हो सकती है – रूप वैधता (Face validity), तार्किक वैधता (Logical validity), प्रतिदर्शज वैधता (Sampling validity) तथा अवयवात्मक वैधता (factorial validity)। उपलब्धि परीक्षण की वैधता विषयगत वैधता के माध्यम से सुनिश्चित की जाती है।

ii. **आनुभाविक वैधता (Empirical validity) :** जब परीक्षण व्यवहार (Test behaviour) तथा निकष व्यवहार (Criterion behaviour) के मध्य संबंध को ज्ञात करके परीक्षण द्वारा मापी जा रही विशेषता या योग्यता के संबंध में प्रमाण एकत्रित किए जाते हैं तो इसे आनुभाविक वैधता या निकष वैधता (Criterion Validity) कहते हैं। यदि परीक्षण प्राप्तांकों तथा निकष प्राप्तांकों में घनिष्ठ संबंध होता है तो परीक्षण को वैध परीक्षण स्वीकार किया जाता है। निकष दो प्रकार के – तात्कालिक निकष (Immediate criterion) तथा भावी निकष (Future criterion) हो सकते हैं । तत्कालिक निकष की स्थिति में परीक्षण के प्राप्तांक तथा निकष पर प्राप्तांक दोनों ही साथ-साथ प्राप्त कर लिए जाते हैं तथा इनके बीच सह-संबंध की गणना कर लेते हैं जिसे समवर्ती वैधता (concurrent validity) कहते हैं। परीक्षण प्राप्तांकों तथा भावी निकष प्राप्तांकों के संबंध को पूर्वकथन वैधता (Predictive Validity) कहते हैं।

iii. **अन्वय वैधता (Construct Validity)** – जब मानसिक शीलगुणों की उपस्थिति के आधार पर परीक्षण की वैधता ज्ञात की जाती है तब इसे अन्वय वैधता कहते हैं।

2.8.3 वैधता ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Estimating validity) –

परीक्षण की वैधता ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त की जाने वाली विभिन्न विधियों को दो मुख्य भागों में बाँटा जा सकता है –

1. **तार्किक विधियाँ या आंतरिक कसौटी पर आधारित विधियाँ (Rational Method or based on Internal Criterion)** : इसके अन्तर्गत तर्कों के आधार पर परीक्षण की वैधता को सुनिश्चित किया जा सकता है। इस विधि से प्राप्त वैधता को रूप वैधता (Face Validity), विषयवस्तु वैधता (Content Validity), तार्किक वैधता (Logical Validity) या कारक वैधता (Factorial Validity) जैसे नामों से भी संबोधित किया जा सकता है। तार्किक विधियों से परीक्षण की वैधता का निर्णय परीक्षण निर्माता अथवा परीक्षण प्रयोगकर्ता स्वयं भी कर सकता है तथा विशेषज्ञों के द्वारा भी करा सकता है। विशेषज्ञों के द्वारा परीक्षण के विभिन्न पक्षों की रेटिंग कराई जा सकती है जिसके आधार पर परीक्षण की वैधता

विभिन्न पक्षों का रेटिंग कराई जा सकती है जिसके आधार पर परीक्षण की वैधता स्थापित की जा सकती है। परीक्षण के लिए इसे विशेषज्ञ वैधता (Expert Validity) भी कहते हैं।

2. **साँख्यिकीय विधियाँ (Statistical methods) :** किसी परीक्षण की वैधता ज्ञात करने के लिए सहसंबंध गुणांक, टी परीक्षण, कारक विश्लेषण, द्वीपंक्तिक सहसंबंध (Biserial), चतुष्कोष्ठिक सहसंबंध (Tetra choric correlation), बहु सहसंबंध (Multiple correlation) जैसी साँख्यिकीय विधियों का प्रयोग भी किया जाता है। पूर्व कथित वैधता (Predictive validity), समवर्ती वैधता (Concurrent validity) तथा अन्वय वैधता (Construct validity) साँख्यिकीय आधार पर ही स्थापित की जाती है। इन विधियों में किसी बाह्य कसौटी के आधार पर ही वैधता गुणांक स्थापित की जाती है। इसलिए इस प्रकार की वैधता को बाह्य कसौटी पर आधारित वैधता भी कहा जाता है।

2.8.4 वैधता को प्रभावित करने वाले कारक (Factors Affecting Validity):

किसी परीक्षण की वैधता अनेक कारकों पर निर्भर करती है। इसको प्रभावित करने वाले कुछ प्रमुख कारक निम्नवत हैं –

i. यदि परीक्षार्थियों को परीक्षण के संबंध में दिए गए निर्देश अस्पष्ट होते हैं तो परीक्षण वैधता कम हो जाती है।

ii. परीक्षार्थियों की अभिव्यक्ति का माध्यम यदि उनकी मातृभाषा में है तो परीक्षण की वैधता अधिक हो जाती है।

iii. प्रश्नों की सरल भाषा एवं आसान शब्दावली परीक्षण की वैधता को बढा देती है।

iiii. अत्यधिक सरल या कठिन प्रश्नों वाले परीक्षण की वैधता प्राय: कम हो जाती है।

v. प्राय: वस्तुनिष्ठ परीक्षण, निबंधात्मक परीक्षण की तुलना में अधिक वैध होते हैं।

vi. प्रकरणों का अवांछित भार परीक्षण की वैधता को प्राय: कम कर देती है।

vii. परीक्षण की लंबाई बढ़ने से उसकी वैधता बढ़ जाती है।

2.8.5 विश्वसनीयता तथा वैधता में संबंध (Relationship between Reliability and Validity):

किसी परीक्षण की विश्वसनीय तथा वैधता एक ही सिक्के के दो पहलू हैं। परीक्षण के वैध होने के लिए उसका विश्वसनीय होना आवश्यक है। यदि किसी परीक्षण से प्राप्त अंक विश्वसनीय नहीं होते हैं तो उनके वैध होने का प्रश्न ही नहीं उठता है। परंतु इसके विपरीत विश्वसनीयता के लिए वैधता का होना कोई पूर्वशर्त नहीं है। अर्थात् विश्वसनीयता का होना वैधता के लिए तो आवश्यक शर्त है, परन्तु पर्याप्त शर्त नहीं है। विश्वसनीय परीक्षण का वैध होना अपने आप में आवश्यक नहीं है, परन्तु वैध परीक्षण अवश्य ही विश्वसनीय होगा। साँख्यिकीय दृष्टिकोण से किसी भी परीक्षण की वैधता का अधिकतम संभाव्य मान उसकी विश्वसनीयता के वर्गमूल के बराबर ही हो सकता है। अर्थात परीक्षण का वैधता गुणांक उसके विश्वसनीयता गुणांक के वर्गमूल से अधिक नहीं हो सकता है।

विश्वसनीयता गुणांक शून्य होने पर वैधता गुणांक स्वत: शून्य हो जाएगी। अत: अविश्वसनीय परीक्षण किसी भी दशा में वैध नहीं हो सकता है, जबकि एक वैधता विहीन परीक्षण विश्वसनीय भी हो सकता है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

11. वैध परीक्षण अवश्य ही ………………………….. होगा।
12. साँख्यिकीय दृष्टिकोण से किसी भी परीक्षण की वैधता का अधिकतम संभाव्य मान उसकी विश्वसनीयता के …………………के बराबर होता है।
13. ....वह सीमा है, जिस सीमा तक परीक्षण वही मापता है, जिसके लिए इसका निर्माण किया गया है।
14. मानसिक शीलगुणों की उपस्थिति के आधार पर परीक्षण की वैधता को ....कहते हैं।
15. वैधता किसी भी परीक्षण का बाह्य कसौटी के साथ ....को दर्शाता है।

2.9 परीक्षण का मानक (Norms of test):

परीक्षण निर्माण (test construction) का अगला चरण परीक्षण के लिए मानक तैयार करने का होता है। किसी प्रतिनिधिक प्रतिदर्श (representative sample) द्वारा परीक्षण पर प्राप्त औसत प्राप्तांक या अंक (average score) को मानक कहा जाता है। परीक्षण निर्माणकर्ता मानक इसलिए तैयार करता है। ताकि वह परीक्षण पर आये अंक की अर्थपूर्ण ढंग से व्याख्या कर सके। शैक्षिक परीक्षणों के लिए अक्सर जिन मानकों का प्रयोग किया जाता है उनमें आयु मानक (age norms) ग्रेड मानक (grade norms) शतमक मानक (percentile norms) तथा प्रमाणिक प्राप्तांक मानक (standard score norms) आदि प्रधान हैं। परीक्षण के स्वरूप को ध्यान में रखते हुए परीक्षण निर्माणकर्ता इन मानकों में से कोई उपर्युक्त मानक (appropriate norms) का निर्माण करता है। मानक ज्ञात करने के लिए सामान्यत: एक बड़े प्रतिदर्श (sample) का चयन किया जाता है।

2.10 मैन्युअल तैयार करना तथा परीक्षण का पुनरूत्पादन करना (Preparation of manual and reproduction of test):

सच्चे अर्थ में यह अंतिम कदम या चरण परीक्षण निर्माण के दायरे से बाहर है। इस चरण के पहले परीक्षण निर्माणकर्ता परीक्षण की जरूरतों को मद्देनजर रखते हुए निश्चित संख्या में परीक्षण की कापियॉं छपवाता है तथा एक पुस्तिका (booklet) तैयार करता है। जिसमें वह परीक्षण के मनोभौतिकी गुणों (Psychometric properties) व अन्य तकनीकी गुणों जैसे एकांश विश्लेषण संबंधी सूचना, विश्वसनीयता गुणांक (reliability coefficient) वैधता गुणांक (validity coefficient) मानक (norms) क्रियान्वयन करने के लिए निर्देश (instruction) के बारे में संक्षिप्त में सूचकांकों को उजागर करता है। इन पुस्तिका को मैन्यूअल कहा जाता है। बाद में कोई भी शोधकर्ता मैन्यूअल में निर्देश (instruction) के ही अनुसार परीक्षण का क्रियान्वयन करता है तथा व्यक्ति द्वारा प्राप्त अंकों का विश्लेषण करता है।

निष्कर्षत: यह कहा जा सकता है कि किसी भी शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण के निर्माण में यही प्रमुख सात चरण हैं जिनका यदि कठोरता से पालन किया जाता है, तो एक उत्तम परीक्षण या

शोध उपकरण का निर्माण संभव हो पाता है।

2.11 सारांश (Summary)

प्रस्तुत इकाई में शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण (test) निर्माण के प्रमुख चरणों (Steps) को स्पष्ट किया गया है। इसके अतिरिक्त अन्य शैक्षिक शोध उपकरणों के निर्माण में भी यही सामान्य सिद्धांत को ध्यान में रखा जाता है। शैक्षिक शोध उपकरण के रूप में परीक्षण (test) निर्माण के प्रमुख चरणों (Steps) को निम्नांकित सात भागों में बॉटा गया है-

1. परीक्षण की योजना (Planning of the test): इस चरण में परीक्षणकर्ता (Test constructor) कई बातों का ध्यान रखता है। जैसे, वह यह निश्चित करता है कि परीक्षण का उद्देश्य (Objectives) क्या है, इसमें एकांशों (Items) की संख्या कितनी होनी चाहिए, एकांश (item) का स्वरूप (nature) अर्थात उसे वस्तुनिष्ठ (objective) या आत्मनिष्ठ (subjective) होना चाहिए, किस प्रकार का निर्देश (instruction) दिया जाना चाहिए, प्रतिदर्श (sampling) की विधि क्या होनी चाहिए, परीक्षण की समय सीमा (time limit) कितनी होनी चाहिए, साँख्यिकीय विश्लेषण (Statistical analysis) कैसे की जानी चाहिए, आदि-आदि।

2. एकांश – लेखन (Item writing): एकांश-लेखन बहुत हद तक परीक्षण निर्माणकर्ता के कल्पना, अनुभव, सूझ, अभ्यास आदि कारकों पर निर्भर करता है। इसके बावजूद भी शोधकर्ताओं ने कुछ ऐसे अपेक्षित गुणों (requisites) की चर्चा की है जिससे शोधकर्ता को उपयुक्त एकांश (appropriate items) लिखने में मदद मिलती है।

3. परीक्षण की प्रारम्भिक क्रियान्वयन या प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (Preliminary tryout or Experimental tryout of the test): शैक्षिक शोध परीक्षण के निर्माण में तीसरा महत्वपूर्ण कदम परीक्षण के प्रारंभिक क्रियान्वयन (Preliminary tryout) का होता है जिसे प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (experimental tryout) भी कहा जाता है। जब परीक्षण के एकांशों (items) की विशेषज्ञो (experts) द्वारा आलोचनात्मक परख कर ली जाती है तो इसके बाद उसका कुछ व्यक्तियों पर क्रियान्वयन (administer) किया जाता है। ऐसे क्रियान्वयन को प्रयोगात्मक क्रियान्वयन कहा जाता है।
4. **परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability of the test):** परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability) व वैधता (Validity) शैक्षिक शोध उपकरणों की महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं। बिना इन दोनों गुणों के कोई भी शैक्षिक शोध उपकरण किसी शोध समस्या को हल नहीं कर सकता। अतः इन दोनों विशेषताओं के बारे में आपको बृहत जानकारी होनी चाहिए। इस हेतु इस इकाई में परीक्षण की विश्वसनीयता (Reliability) वैधता (Validity) का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है। परीक्षण की विश्वसनीयता से अभिप्राय भिन्न-भिन्न अवसरों पर या समतुल्य पदों के भिन्न-भिन्न विन्यासों पर, किसी व्यक्ति के द्वारा प्राप्त अंकों की संगति से है।'

विश्वसनीयता प्राप्त करने की पाँच मुख्य विधियाँ हैं –

i. परीक्षण-पुनर्परीक्षण विश्वसनीयता विधि (Test-retest reliability)

ii. समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता (Equivalence forms Reliability)

iii. अर्द्धविच्छेद विश्वसनीयता (Split-Halves Reliability)

iiii. तार्किक समतुल्यता विश्वसनीयता (Rational-Equivalence Reliability)

v. होय्स्ट विश्वसनीयता (Hoyt Reliability)

कालिक संगति ज्ञात करने के लिए परीक्षण-पुनर्परीक्षण विश्वसनीयता विधि का प्रयोग किया जाता है। किसी उपयुक्त प्रतिदर्श (sample) पर सामान्यत: 14 दिन के अंतराल पर परीक्षण को दोबारा क्रियान्वयन (administer) किया जाता है। इस तरह से परीक्षण प्राप्तांकों (test scores) के दो सेट हो जाते हैं और उन दोनों में सहसंबंध गुणांक (correlation coefficient) ज्ञात कर कालिक संगति गुणांक (temporal consistency coefficient) ज्ञात कर लिया जाता है। यह गुणांक जितना ही अधिक होता है (जैसे 0.87, 0.92 आदि) परीक्षण की विश्वसनीयता उतनी ही अधिक समझी जाती है। आंतरिक संगति ज्ञात करने के लिए किसी उपयुक्त प्रतिदर्श (appropriate sample) पर परीक्षण को एक बार क्रियान्वयन कर लिया जाता है। उसके बाद परीक्षण के सभी एकांशों को दो बराबर या लगभग भागों में बॉट दिया जाता हैं। इस प्रकार से प्रत्येक व्यक्ति का कुल प्राप्तांक (total score) दो-दो हो जाते हैं। जैसे, यदि परीक्षण के सभी सम संख्या वाले एकांश (even numbered items) को एक तरफ तथा सभी विषय संख्या वाले एकांशों (odd numbered items) की दूसरी तरफ कर दिया जाए तो सभी सम संख्या वाले एकांश पर एक कुल प्राप्तांक (total score) आएगा तथा सभी विषय संख्या वाले एकांशों पर दूसरा कुल प्राप्तांक (total score) आएगा। इस तरह से कुल प्राप्ताकों का दो सेट हो जाएगा जिसे आपस में सहसंबंधित (correlate) किया जाएगा इसे आंतरिक संगति गुणांक (internal consistency coefficient) कहा जाता है। यह गुणांक जितना ही अधिक होगा, परीक्षण की विश्वसनीयता (reliability) भी उतनी ही अधिक होगी इन दोनों उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि विश्वसनीयता का पता लगाने में परीक्षण (test) को एक तरह से अपने-आप से सह संबंधित किया जाता है। यही कारण हैं कि विश्वसनीयता को परीक्षण का स्वसहसंबंध (self-correlation) कहा जाता है।

6. **परीक्षण की वैधता (Validity of the test):** जब परीक्षण उस गुण या आदत या मानसिक प्रक्रिया का सही-सही मापन करता है जिसके लिए उसे बनाया गया था, तो इसे ही परीक्षण की वैधता (Validity) की संज्ञा दी जाती है और ऐसे परीक्षण को वैध परीक्षण (Valid test) कहा जाता है। परीक्षण की वैधता ज्ञात करने के लिए बनाये जा रहे परीक्षण को किसी बाह्य कसौटी (external criterion) के साथ सहसंबंधित करना होता है। यदि सहसंबंध अधिक ऊँचा होता है तो परीक्षण में वैधता (Validity) का गुण अधिक समझा जाता है। यहाँ बाह्य कसौटी (external criterion) से तात्पर्य कोई अन्य दूसरा समान परीक्षण या कोई और कसौटी जिसके द्वारा वही शीलगुण या क्षमता का मापन होता है जो बनाये गये परीक्षण द्वारा होता है तथा जिसकी वैधता एवं विश्वसनीयता संतोषजनक होती है, से होती है। परीक्षण की वैधता को सही-सही ऑकने के लिए यह आवश्यक है कि इस परीक्षण एवं बाह्य कसौटी का क्रियान्वयन (administration) चुने गये व्यक्तियों के ऐसे प्रतिदर्श (sample) पर किया जाना चाहिए जो एकांश विश्लेषण (item analysis) के लिए चयन किये प्रतिदर्श से भिन्न हो। इस प्रक्रिया को क्रास वैधीकरण (cross validation) की संज्ञा दी जाती है। परीक्षण प्राप्तांकों की वैधता ज्ञात करने में प्राय: पियरसन और (pearson r) टी अनुपात (t ratio) द्विपंक्तिक आर (Biserial r) बिंदु द्विपंक्तिक आर (Point-biserial r) आदि सामान्य (common) हैं। इस इकाई के अगले भाग में परीक्षण की वैधता (Validity) का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है।

भाग में परीक्षण की वैधता (Validity) का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है।

7. परीक्षण का मानक (Norms of the test): परीक्षण निर्माण (test construction) का अगला चरण परीक्षण के लिए मानक तैयार करने का होता है। किस प्रतिनिधिक प्रतिदर्श (representative sample) द्वारा परीक्षण पर प्राप्त औसत प्राप्तांक या अंग (average score) को मानक कहा जाता है। परीक्षण निर्माणकर्ता मानक इसलिए तैयार करता है। ताकि वह परीक्षण पर आये अंक की अर्थपूर्ण ढंग से व्याख्या कर सके।
8. परीक्षण का मैन्युअल तैयार करना एवं पुनरूत्पादन करना (Preparation of manual and reproduction of test): परीक्षण प्रशासित करने की प्रणाली के बारे में उल्लिखित पुस्तिका को मैन्यूअल कहा जाता है। कोई भी शोधकर्ता मैन्यूअल में निर्देश (instruction) के ही अनुसार परीक्षण का क्रियान्वयन करता है तथा व्यक्ति द्वारा प्राप्त अंकों का विश्लेषण करता है।

2.12 शब्दावली

एकांश (Item): एकांश एक ऐसा प्रश्न या पद होता है जिसे छोटी इकाईयों में नहीं बाँटा जा सकता है।

प्रयोगात्मक क्रियान्वयन (Experimental Tryout): जब परीक्षण के एकांशों (items) की विशेषज्ञो (experts) द्वारा आलोचनात्मक परख कर ली जाती है तो इसके बाद उसका कुछ व्यक्तियों पर क्रियान्वयन (administer) किया जाता है। ऐसे क्रियान्वयन को प्रयोगात्मक क्रियान्वयन कहा जाता है।

कठिनाई सूचकांक (Difficulty Index): कठिनाई सूचकांक से यह पता चल जाता है कि एकांश व्यक्ति के लिए कठिन है या हल्का है ।

विभेदन सूचकांक (Discriminating Index): विभेदन सूचकांक से यह पता चल जाता है कि कहाँ तक एकांश उत्तम व्यकितयों और निम्न व्यक्तियों में अन्तर कर रहा है।

एकांश विश्लेषण: एकांश विश्लेषण (item analysis) द्वारा प्रत्येक एकांश के उत्तर के रूप में दिए गये कई विकल्पों (alternatives) की प्रभावशीलता (effectiveness) का पता चलता है।

विश्वसनीयता (Reliability): यदि किसी परीक्षण का प्रयोग बार-बार उन्हीं छात्रों पर किया जाये तथा वे छात्र बार-बार समान अंक प्राप्त करें, तो परीक्षण को विश्वसनीय कहा जाता है। यदि परीक्षण से प्राप्त अंकों में स्थायित्व है तो परीक्षण को विश्वसनीय परीक्षण के रूप में स्वीकार किया जाता है।

परीक्षण-पुनर्परीक्षण विश्वसनीयता विधि (Test-retest reliability): इस विधि में परीक्षण को दो बार छात्रों के किसी समूह पर प्रशासित किया जाता है, जिससे प्रत्येक छात्र के लिए दो प्राप्तांक प्राप्त हो जाते हैं। परीक्षण के प्रथम प्रशासन तथा परीक्षण के द्वितीय प्रशासन से प्राप्त अंकों के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना कर ली जाती है। यह सहसंबंध गुणांक (r) ही परीक्षण के लिए परीक्षण-पुन:परीक्षण विश्वसनीयता गुणांक कहलाता है। इस प्रकार से प्राप्त विश्वसनीयता गुणांक को स्थिरता गुणांक (coefficient of stability) भी कहा जाता है।

समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता (Equivalence forms Reliability): यदि किसी परीक्षण की दो से अधिक समतुल्य प्रतियॉ इस ढंग से तैयार की जाती है कि उन पर प्राप्त अंक एक दूसरे के

समतुल्य हों , तब समतुल्य परीक्षण विश्वसनीयता की गणना की जाती है।

अर्द्धविच्छेद विश्वसनीयता (Split Halves Reliability) : किसी भी परीक्षण को दो समतुल्य भागों में विभक्त करके विश्वसनीयता गुणांक ज्ञात किया जाता है।

तार्किक समतुल्यता विश्वसनीयता (Rational-Equivalence Reliability): यह विधि परीक्षण की सजातीयता का मापन करती है इसलिए कूडर रिचार्डसन विधि से विश्वसनीयता गुणांक को सजातीयता गुणांक या आन्तरिक संगति गुणांक भी कहा जाता है। विश्वसनीयता गुणांक निकालने के लिए कूडर रिचार्डसन ने अनेक सूत्रों का प्रतिपादन किया, जिनमें से दो सूत्र **के०आर० 20** तथा **के०आर० 21** अधिक प्रचलित है।

होय्ट विश्वसनीयता (Hoyt Reliability): होय्ट ने प्रसरण (Variance) को विश्वसनीयता गुणांक निकालने का आधार माना है। प्रसरण विश्लेषण साँख्यिकीय तकनीक का प्रयोग कर होय्ट विश्वसनीयता को ज्ञात की जा सकती है।

मापक की मानक त्रुटि (Standard Error of Measurement) :त्रुटि प्राप्तांकों के मानक विचलन को मापक की मानक त्रुटि कहते हैं तथा इसे σ_e से व्यक्त करते हैं।

विश्वसनीयता सूचकांक (Index of Reliability) : परीक्षण पर प्राप्त कुल अंकों (X) तथा सत्य प्राप्तांकों (T) के बीच सहसंबंध गुणांक को विश्वसनीयता सूचकांक कहते हैं। उसका मान विश्वसनीयता गुणांक के वर्गमूल के बराबर होता है।

परीक्षण वैधता (Test Validity): वैधता का सीधा संबंध परीक्षण के उद्देश्यपूर्णता से है। जब परीक्षण अपने उद्देश्य की पूर्ति करता है, तब ही उसे वैध परीक्षण कहते हैं तथा परीक्षण की इस विशेषता को वैधता कहते हैं।

विषयगत वैधता (Content Validity) – जब परीक्षण की वैधता स्थापित करने के लिए परीक्षण परिस्थितियों तथा परीक्षण व्यवहार का सावधानीपूर्वक विश्लेषण करके परीक्षण द्वारा मापी जा रही विशेषता/योग्यता के संबंध में प्रमाण एकत्रित किए जाते हैं तो इसे विषयगत वैधता कहते हैं।

आनुभाविक वैधता (Empirical validity) : जब परीक्षण व्यवहार (Test ehavior) तथा निकष व्यवहार (Criterion ehavior) के मध्य संबंध को ज्ञात करके परीक्षण द्वारा मापी जा रही विशेषता या योग्यता के संबंध में प्रमाण एकत्रित किए जाते हैं तो इसे आनुभाविक वैधता या निकष वैधता (Criterion Validity) कहते हैं।

अन्वय वैधता(Construct Validity): जब मानसिक शीलगुणों की उपस्थिति के आधार पर परीक्षण की वैधता ज्ञात की जाती है तब इसे अन्वय वैधता कहते है।

मानक (Norms):किसी प्रतिनिधिक प्रतिदर्श (representative sample) द्वारा परीक्षण पर प्राप्त औसत प्राप्तांक या अंक (average score) को मानक कहा जाता है। मानक परीक्षण पर आये अंक की अर्थपूर्ण ढंग से व्याख्या करने में सहायता करता है।

मैन्यूअल (Manual) : निर्देश (instruction) पुस्तिका जिसके अनुसार शोधकर्ता परीक्षण का क्रियान्वयन करता है तथा परीक्षण पर प्राप्त अंकों का विश्लेषण करता है।

2.13 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. एकांश की वैधता 2. विभेदी सूचकांक (discriminatory index) 3. कठिनाई सूचकांक 4.

विभेदन सूचकांक 5. एकांश 6. 0.60 7. विश्वसनीयता सूचकांक 8. गति परीक्षण (Speed Test) 9. अधिक 10. अधिक 11. विश्वसनीय 12. वर्गमूल 13. वैधता 14. अन्वय वैधता 15. सहसंबंध

2.14 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.

2. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.

3. Ebel, Robert L. (1966) Measuring Educational Achievement, New Delhi, PHI.

4. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.

5. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास।

6. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन।

7. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

8. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.

9. Cronbach, Lee J. (1996). Essentials of Psychological Testing, New York, Harper and Row Publishers.

10. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.

2.15 निबंधात्मक प्रश्न

1. शोध उपकरणों के निर्माण के सामान्य सिद्धांतों का वर्णन कीजिए।

2. शोध उपकरणों के निर्माण हेतु प्रयुक्त प्रमुख पदों का मूल्यांकन कीजिए।

3. विश्वसनीयता की विशेषताओं का वर्णन कीजिए।

4. वैधता के संप्रत्यय की व्याख्या कीजिए तथा विश्वसनीयता व वैधता के मध्य संबंधों का वर्णन कीजिए।

5. विश्वसनीयता को प्रभावित करने वाले कारकों की व्याख्या कीजिए।

6. वैधता को प्रभावित करने वाले कारकों की व्याख्या कीजिए।

7. विश्वसनीयता के प्रकारों का वर्णन कीजिए।

इकाई संख्या 3: वर्णनात्मक साँख्यिकी: केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक (Descriptive Statistics: Measures of Central Tendency)

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

3.2 उद्देश्य

3.3 साँख्यिकी का अर्थ

3.4 वर्णनात्मक साँख्यिकी

3.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषा

3.6 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य व कार्य

3.7 आदर्श माध्य के लक्षण

3.8 साँख्यिकीय माध्य के विविध प्रकार

3.9 समान्तर माध्य

3.10 समान्तर माध्य के प्रकार

3.11 सरल समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि

3.12 मध्यिका

3.13 मध्यिका की गणना

3.14 मध्यिका के सिद्धान्त पर आधारित अन्य माप

3.15 बहुलक

3.16 बहुलक की गणना

3.17 समान्तर माध्य, मध्यिका तथा बहुलक के बीच संबंध

3.18 सारांश

3.19 शब्दावली

3.20 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

3.21 सदभ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
3.22 निबंधात्मक प्रश्न

3.1 प्रस्तावना :

हमारे जीवन में संख्याओं की भूमिका तीव्र गति से बढ़ती जा रही है। ज्ञान, विज्ञान, समाज और राजनीति का कोई भी ऐसा क्षेत्र नहीं है जो संख्यात्मक सूचना के प्रवेश से अछूता रह गया हो। ऑकड़ों का संकलन, सूचनाओं का प्रस्तुतीकरण, सम्भावनाओं का पता लगाना तथा इनके आधार पर निष्कर्ष निकालना आधुनिक समाज में एक आम बात हो गई है। शैक्षिक विश्लेषण, शैक्षिक संम्प्राप्ति (उपलब्धि परीक्षण), बुद्धि परीक्षण, व्यक्तित्व मूल्यांकन आदि कुछ ऐसे उदाहरण हैं जिन पर 'साँख्यिकीय' विधियों के प्रयोग के अभाव में विचार करना भी सम्भव नहीं है। इस प्रकार शोध एवं विकास की शायद ही कोई ऐसी शाखा हो, जिसे साँख्यिकीय विधियों के प्रयोग के बिना संचालित किया जा सके। कार्य के आधार पर साँख्यिकी को मुख्यतः दो भागों में बांटा जाता है: वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive Statistics) तथा अनुमानिकी साँख्यिकी (Inferential Statistics)। प्रस्तुत इकाई में आप साँख्यिकी का अर्थ तथा वर्णनात्मक साँख्यिकी के रूप में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों (Measures of Central Tendency) का अध्ययन करेंगे।

3.2 उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- साँख्यिकी का अर्थ बता पायेंगे।
- वर्णनात्मक साँख्यिकी का अर्थ बता पायेंगे।
- वर्णनात्मक साँख्यिकी के महत्व का वर्णन कर सकेंगे।
- वर्णनात्मक साँख्यिकी के संप्रत्यय की व्याख्या कर सकेंगे।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।

3.3 साँख्यिकी का अर्थ (Meaning of Statistics):

अंग्रेजी भाषा का शब्द 'स्टैटिस्टिक्स' (Statistics) जर्मन भाषा के शब्द 'स्टैटिस्टिक' (Statistick), लेटिन भाषा के शब्द 'Status' या इटेलियन शब्द 'स्टैटिस्टा' (Statista) से बना है। वैसे 'स्टैटिस्टकस' (Statistics) शब्द का प्रयोग सन् 1749 में जर्मनी के प्रसिद्ध गणितज्ञ 'गॉट फ्रायड आकेनवाल' द्वारा किया गया था जिन्हें साँख्यिकी का जन्मदाता भी कहा जाता है।

डा0 ए0एल0 बाउले (Dr. A.L. Bowley) के अनुसार :- समंक किसी अनुसंधान से संबंधित विभाग में तथ्यों का संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक दूसरे से संबंधित रूप से प्रस्तुत किया जाता है (Statistics are numerical statement of facts in any department of enquiry placed in relation to each other) ।

यूल व कैण्डाल के अनुसार: "समांकों से अभिप्राय उन संख्यात्मक तथ्यों से जो पर्याप्त सीमा तक

यूल व केण्डाल के अनुसार:- "समंकों से अभिप्राय उन संख्यात्मक तथ्यों से जो पर्याप्त सीमा तक अनेक कारणों से प्रभावित होत हैं।"

बॉडिंगटन के अनुसार:- "साँख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है। (Statistics is the Science of estimates and probabilities)

साँख्यिकी के इन परिभाषाओं से निम्नलिखित विशेषताएँ प्रकट होती हैं:-

(i) "साँख्यिकी गणना का विज्ञान है। (Statistics is the science of counting)"

(ii) "साँख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है। (Statistics may rightly be called the science of Averages)"

(iii) "साँख्यिकी समाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर उनके सभी प्रकटीकरणों में माप करने का एक विज्ञान है। (Statistics is the science of measurement of social organism regarded as a whole in all its manifestations) "

3.4 वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive Statistics):

इनसे किसी क्षेत्र के भूतकाल तथा वर्तमान काल में संकलित तथ्यों का अध्ययन किया जाता है और इनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। अत: ये समंक ऐतिहासिक महत्व रखते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णनात्मक साँख्यिकी के उदाहरण हैं।

3.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Central Tendency):

एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को ही माध्य कहते हैं। माध्य को केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर मूल्यों का जमाव अधिकतर उसी के आस-पास होता है। इस प्रकार माध्य सम्पूर्ण समंक श्रेणी का एक प्रतिनिधि मूल्य होता है और इसलिए इसका स्थान सामान्यत: श्रेणी के मध्य में ही होता है। दूसरे शब्दों में, साँख्यिकीय माध्य को केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप इसलिए कहा जाता है क्योंकि यह समग्र के उस मूल्य को दर्शाता है, जिसके आस-पास समग्र की शेष इकाईयों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पायी जाती है।

यूल व केण्डाल (Yule and Kendal) के शब्दों में:- "किसी आवृत्ति वितरण की अवस्थिति या स्थिति के माप माध्य कहलाते हैं।"

(Measures of location or position of a frequency distribution are called averages)

क्रॉक्सटन एवं काउडेन (Croxton and Cowden) के अनुसार:- "माध्य समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिये किया जाता है। समंक श्रेणी के विस्तार के मध्य में स्थित होने के कारण ही माध्य को केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।"

(An average is single value within the range at the data which is used to represent all the values in the series. Since an average is somewhere within the

range of the data, it is some times called a measure of central value)

डा0 बाउले के अनुसार:- "साँख्यिकी को वास्तव में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है।" (Statistics may rightly be called the science of average)

3.6 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य व कार्य (Objectives and functions of Measures of Central Tendency):

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य एवं कार्य निम्न प्रकार हैं-

1. **सामग्री को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करना:-** माध्य द्वारा हम संग्रहीत सामग्री को संक्षेप में प्रस्तुत करते हैं, जिसे एक समान व्यक्ति शीघ्रता व सरलता से समझ कर स्मरण रख सकता है।
2. **तुलनात्मक अध्ययन:-** माध्यों का प्रयोग दो या दो से अधिक समूहों के संबंध में निश्चित सूचना देने के लिए किया जाता है। इस सूचना के आधार पर हम उन समूहों का पारस्परिक तुलनात्मक अध्ययन सरलता से कर सकते हैं। उदाहरणार्थ: हम दो कक्षाओं के छात्रों की अंकों की तुलनात्मक अध्ययन के आधार पर उनकी उपलब्धि की तुलना का सकते हैं।
3. **समूह का प्रतिनिधित्व:-** माध्य द्वारा सम्पूर्ण समूह का चित्र प्रस्तुत किया जा सकता है। एक संख्या (माध्य) द्वारा पूर्ण समूह की संरचना के बारे में पर्याप्त जानकारी प्राप्त हो सकती है। प्राय: व्यक्तिगत इकाइयाँ अस्थिर व परिवर्तनशील होती है जबकि औसत इकाईयाँ अपेक्षाकृत स्थिर होती है।
4. **अंक गणितीय क्रियाएँ:-** दो विभिन्न श्रेणियों के संबंध को अंकगणित के रूप में प्रकट करने हेतु माध्यों की सहायता अनिवार्य हो जाती है और इन्हीं के आधार पर अन्य समस्त क्रियाएँ सम्पन्न की जाती है।
5. **भावी योजनाओं का आधार:-** हमें माध्यों के रूप में समूह का एक ऐसा मूल्य प्राप्त होता है जो हमारी भावी योजनाओं के लिए आधार का कार्य करता है।
6. **पारस्परिक संबंध:-** कभी-कभी दो समंक समूहों के पारस्परिक संबंध की आवश्यकता होती है, जैसे- दो समूहों में परिवर्तन एक ही दिशा में है या विपरीत दिशा में। यह जानने के लिए माध्य ही सबसे सरल मार्ग है।

3.7 आदर्श माध्य के लक्षण (Essential Characteristics of an Ideal Average):

किसी भी आदर्श माध्य में निम्नलिखित गुण होनी चाहिए:-

1. **प्रतिनिधि:-** माध्य द्वारा समग्र का प्रतिनिधित्व किया जाना चाहिए, जिससे समग्र की अधिकाधिक विशेषताएँ माध्य में पायी जा सके। माध्य ऐसा हो कि समग्र के प्रत्येक मद से उसकी अधिक निकटता प्राप्त हो सके।
2. **स्पष्ट एवं स्थिर:-** माध्य सदैव स्पष्ट एवं स्थिर होना चाहिए ताकि अनुसंधान कार्य ठीक ढंग से सम्पन्न किया जा सके। स्थिरता से आशय है कि समग्र की इकाईयों में कुछ और इकाईयाँ जोड़ देने या घटा देने से माध्य कम से कम प्रभावित हो।
3. **निश्चित निर्धारण:-** आदर्श माध्य वही होता है जो निश्चित रूप में निर्धारित किया जा सकता हो। अनिश्चित संख्या निष्कर्ष निकालने में भ्रम उत्पन्न कर देती है। यदि माध्य एक संख्या न होकर एक वर्ग आये तो इसे अच्छा माध्य नहीं कहेंगें।
4. **सरलता व शीघ्रता:-** आदर्श माध्य में सरलता व शीघ्रता का गुण भी होना चाहिए जिससे किसी भी व्यक्ति द्वारा इसकी गणना सरलता व शीघ्रता से की जा सके तथा वह समझने में किसी प्रकार की कठिनाई अनुभव न करे।

[illegible]

5. **परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव:-** आदर्श माध्य की यह विशेषता होनी चाहिए कि न्यादर्श में होने वाले परिवर्तनों का माध्य पर कम से कम प्रभाव पड़े। यदि न्यादर्श में परिवर्तन से माध्य भी परिवर्तित हो जाता है तो उसे माध्य नहीं कहा जा सकता।
6. **निरपेक्ष संख्या:-** माध्य सदैव निरपेक्ष संख्या के रूप में ही व्यक्त किया जाना चाहिए। उसे प्रतिशत में या अन्य किसी सापेक्ष रीति से व्यक्त किया हुआ नहीं होना चाहिए।
7. **बीजगणित एवं अंकगणित विधियों का प्रभाव:-** एक आदर्श माध्य में यह गुण भी आवश्यक है कि उसे सदैव अंकगणित एवं बीजगणित विवेचन में प्रयोग होने की व्यवस्था होनी चाहिए।
8. **माध्य का आकार:-** आदर्श माध्य वह होता है जो श्रृंखला या श्रेणी के समस्त मूल्यों के आधार पर ज्ञात किया गया हो।
9. **श्रेणी के मूल्यों पर आधारित:-** माध्य संख्या यदि श्रेणी में वास्तव में स्थित हो तो उचित है अन्यथा माध्य अनुमानित ही सिद्ध होगा।

3.8 साँख्यिकीय माध्य के विविध प्रकार (Different kinds of Statistical Averages):

साँख्यिकीय में मुख्यत: निम्न माध्यों का प्रयोग होता है:-

I. स्थिति सम्बन्धी माध्य (Averages of position)
  a. बहुलक (Mode)
  b. मध्यिका (Median)
II. गणित सम्बन्धी माध्य (Mathematical Average)
  a. समान्तर माध्य (Arithmetic Average or mean)
  b. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
  c. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)
  d. द्विघात या वर्गीकरण माध्य (Quadratic Mean)
III. व्यापारिक माध्य (Business Average)
  a. चल माध्य (Moving Average)
  b. प्रगामी माध्य (Progressive Average)
  c. संग्रहीत माध्य (Composite Average)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में आप यहाँ समान्तर माध्य (Arithmetic Mean), मध्यिका (Median) व बहुलक (Mode) का ही अध्ययन करेंगे ।

3.9 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean):

समान्तर माध्य गणितीय माध्यों में सबसे उत्तम माना जाता है और यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का सम्भवत: सबसे अधिक लोकप्रिय माप है। क्रॉक्सटन तथा काउडेन के अनुसार- " किसी समंक श्रेणी का समान्तर माध्य उस श्रेणी के मूल्यों को जोड़कर उसकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है।" होरेस सेक्रिस्ट के मतानुसार- "समान्तर माध्य वह मूल्य है जो कि एक श्रेणी के योग में उनकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होती है।"

3.10 समान्तर माध्य के प्रकार (Types of Arithmetic Mean):

समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं।

1. सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)
2. भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

1. **सरल समान्तर माध्य:-** जब समंक श्रेणी के समस्त मदों को समान महत्व दिया जाता है तो मदों के मूल्यों के योग में मदों की संख्या का भाग दिया जाता है। इसे ही सरल समान्तर माध्य कहते हैं।
2. **भारित समान्तर माध्य:-** समान्तर माध्य में यह दोष है कि समस्त मदों को समान महत्व दिया जाता है, किन्तु कभी-कभी समंक श्रेणी के विभिन्न मदों में काफी भिन्नता होती है। उनमें आवश्यकता अनुसार महत्व देना आवश्यक हो जाता है। इसके लिए प्रत्येक मद को उसकी व्यक्तिगत महत्ता के आधार पर भार (Weight) प्रदान किया जाता है। इसके बाद प्रत्येक मद के मूल्य को उसके द्वारा दिये गये भार से गुणा कर देते हैं। इस प्रकार गुणनफल के योग में भारों के योग का भाग देने पर प्राप्त होने वाली संख्या भारित समान्तर माध्य कहलाती है।

3.11 सरल समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि (Method of Computing Arithmetic Mean):

समान्तर माध्य की गणना करने के लिए दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है:-

i. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)
ii. लघु रीति (Short-cut Method)

अवर्गीकृत तथ्यों या व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना:-

1. **प्रत्यक्ष रीति (Direct Method):-** प्रत्यक्ष रीति में (i) समस्त मदों के मूल्यों का योग किया जाता है। (ii) प्राप्त मूल्यों के योग में मदों की संख्या का भाग देकर समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है। यह विधि उस समय उपयुक्त होती है जब चर मूल्यों की संख्या कम हो तथा वे दशमलव में हों।

सूत्रानुसार – $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots\dots\dots + X_n}{N}$

$= \frac{\text{पदों का योग (TotaValue of Items)}}{\text{पदों की संख्या}}$ अथवा $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

यहाँ $\overline{X} =$ समान्तर माध्य (Mean)

N = मदो की कुल सख्या (No. of Items)

Σ = योग (Sum or Total)

X = मूल्य या आकार (Value or Size)

उदाहरण:- निम्नलिखित सारणी में कक्षा IX के छात्रों के गणित का अंक प्रस्तुत किया गया है। समान्तर माध्य का परिकलन प्रत्यक्ष रीति द्वारा करें।

S.N.	Marks
1.	57
2.	45
3.	49
4.	36
5.	48
6.	64
7.	58
8.	75
9.	68
योग (Total)	**500**

सूत्रानुसार $\overline{X} = \frac{\sum x}{N}$

$\sum X = 500$

$N = 9$

$\overline{X} = \frac{500}{9} = 55.55$

माध्य (Mean) = 55.55

2. लघु रीति (Short Cut Method):- इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है, जबकि समंक श्रेणी में मदों की संख्या बहुत अधिक हो। इस रीति का प्रयोग करते समय निम्नलिखित क्रियायें की जाती है:-

i. **कल्पित माध्य (A):-** श्रेणी में किसी भी संख्या को कल्पित माध्य मान लेते हैं। यह संख्या चाहे उस श्रेणी में हो अथवा नहीं, परन्तु श्रेणी के मध्य की किसी संख्या को कल्पित माध्य मान लेने से गणना क्रिया सरल हो जाती है।

ii. **विचलन (*dx*) की गणना:-** उपयुक्त कल्पित माध्य से समूह के विभिन्न वास्तविक मूल्यों का विचलन धन (+) तथा ऋण (-) के चिन्हों को ध्यान में रखते हुए ज्ञात करते हैं। (***dx*** =X-A)

iii. **विचलनों का योग ($\sum$ *dx*):-** व्यक्तिगत श्रेणी में सभी विचलनों को जोड़ लेते हैं। ऐसा करते समय धनात्मक और ऋणात्मक चिन्हों को ध्यान में रखा जाता है।

iiii. **मदों की संख्या (N) से भाग देना:-** उपयुक्त प्रकार से प्राप्त योग में मदों की संख्या का भाग दे दिया जाता है।

v. **माध्य ($\overline{X}$)ज्ञात करना:-** विचलन के योग में मदों की संख्या का भाग देने पर जो भागफल प्राप्त हो, उसे कल्पित माध्य में जोड़कर अथवा घटाकर माध्य ज्ञात करते हैं। भागफल यदि धनात्मक हो तो उसे कल्पित माध्य में जोड़ देते हैं और यदि यह ऋणात्मक हो तो उसे कल्पित माध्य में से घटा देते हैं। इस प्रकार प्राप्त होने वाली संख्या समान्तर माध्य कहलायेगी। यह रीति इस तथ्य पर आधारित है कि वास्तविक समान्तर माध्य से विभिन्न मदों के विचलन का योग शून्य होता है।

सूत्रानुसार:- $\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$

यहाँ $\overline{X}$ = समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

A = कल्पित माध्य (Assumed mean)

$\sum dx$ = कल्पित माध्य से लिये गये मूल्यों के विचलनों का योग

(Sum of deviations from Assumed mean)

N = मदों की संख्या (Total No. Items)

उदाहरण:- निम्नलिखित सारणी में कक्षा IX के 10 छात्रों को विज्ञान विषय के अधिकतम प्राप्तांक 20 में से निम्न अंक प्राप्त हुए हैं, इन छात्रों का विज्ञान विषय में समान्तर माध्य की गणना लघु रीति से करें।

अंक – 15, 13, 09, 18, 17, 08, 12, 14, 11, 10

समान्तर माध्य की गणना (Calculation):

S. N.	Marks	Deviation
1.	15	- 2
2.	13	- 4
3.	09	- 8
4.	18	+ 1
5.	17	0
6.	08	- 9
7.	12	- 5
8.	14	- 3
9.	11	- 6

10.	10	- 7
N= 10		योग =- 44+1
		$\sum dx$ = - 43

$\overline{X}$ = A+ $\frac{\sum dx}{N}$

= 17 + $\frac{-43}{10}$

= 17+ (-4.3)

= 12.7

खण्डित श्रेणी (Discrete Series):- खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना दो प्रकार से की जा सकती है।

i. **प्रत्यक्ष विधि (Direct Method):-** खण्डित श्रेणी में कुल पदों के मूल्यों का योग ज्ञात करने हेतु प्रत्येक पद मूल्य (x) को उसकी आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है, इन गुणनफलों का योग ही कुल पद मूल्यों का योग होता है ($\sum fx$), इन योग में पदों की संख्या (N) का भाग देने से समान्तर माध्य ज्ञात हो जाता है, यथा

1. प्रत्येक मूल्य से उसकी आवृत्ति को गुणा करते हैं (fx)
2. गुणनफल का योग ज्ञात करते है।($\sum xf$)
3. कुल आवृत्ति का योग ज्ञात करत हैं। ($\sum f$ *or N)*)
4. गुणनफल के योग में कुल आवृत्तियों के योग से भाग देकर समान्तर माध्य प्रस्तुत सूत्र द्वारा ज्ञात करते है: $\overline{X} = \frac{\sum fx}{N}$

यहाँ $\overline{X}$ = समान्तर माध्य

$\sum fx$ = मूल्यों से संबंधित आवृत्तियों के गुणनफलों का योग।

N = आवृत्तियों का योग।

ii. लघु रीति (Short-Cut Method):- गणना विधि-

1. किसी मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लेते हैं।
2. कल्पित माध्य से वास्तविक मूल्यों के विचलन ज्ञात करते हैं। (dx=X-A)
3. इन विचलनों (dx) को संबंधित आवृत्ति (f) से गुणा करते हैं। (fd$x$)
4. गुणनफल से योग ज्ञात करते हैं ($\sum f$ dx)
5. गुणनफल के योग में कुल आवृत्ति के योग का भाग देने पर जो संख्या प्राप्त हो उसे

कल्पित माध्य में जोड़कर अथवा घटाकर समान्तर माध्य ज्ञात करते हैं।

6. इसको ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:-

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

यहाँ $\overline{X}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum fx$ = विचलनों व आवृत्तियों के गुणनफल का योग।

N = आवृत्तियों का योग।

उदाहरण:- निम्नलिखित समंकों से प्रत्यक्ष रीति व लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन कीजिए। 20, 25, 75, 50, 10, 15, 60, 65

हल:

क्रम सं0	**प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)**	**लघु रीति (Short Cut)**		**विचलन A= 50 से dx**
1.	20	1	20	-30
2.	25	2	25	-25
3.	75	3	75	+25
4.	50	4	50	+0
5.	10	5	10	-40
6.	15	6	15	-35
7.	60	7	60	+10
8.	65	8	65	+15
N= 8	$\sum x$ =320			$\sum$ dx = -80

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{320}{8}$$

= 40

माध्य = 40

लघु रीति (Short Cut)

$$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 50 + \frac{-80}{8}$$

= 50 + (-10) = 40

माध्य = 40

सतत श्रेणी (Continuous Series):- अखण्डित या सतत श्रेणी मे समान्तर माध्य की गणना के लिए सर्वप्रथम वर्गान्तरों के मध्य मूल्य ज्ञात करके उसे खण्डित श्रेणी में परिवर्तित कर लेते हैं। मध्य मूल्य ज्ञात करने के लिए वर्गान्तरों की अपर और अधर सीमाओं को जोड़कर दो से भाग दिया जाता है। यह इस मान्यता पर आधारित है कि मध्यमूल्य उस वर्ग में सम्मिलित सभी मदों का प्रतिनिधि मूल्य होता है। इसके पश्चात् प्रत्यक्ष या लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कर लेते हैं। इसकी विधि खण्डित श्रेणी के समान ही है।

उदाहरण:- निम्न आवृत्ति वितरण से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए:-

Marks (out of 50) 0-10 10-20 20-
30 30-40 40-50

No. of
Student 10 12 20 18
10

हल (Solution):-

समान्तर माध्य का प्रत्यक्ष व लघु रीति विधि से परिकलन (Calculation of Arithmetic Mean by direct & Short -Cut Method)

Marks	**M.V.= X**	**f**	**fx**	**dx A= 25**	**f dx**
0-10	5	10	50	-20	-200
10-20	15	12	180	-10	-120
20-30	25	20	500	0	0
30-40	35	18	630	+10	+180
40-50	45	10	450	+20	+200
Total		N=70	$\sum fx$ =1810		$\sum fdx$ = -320 + 380 = + 60

Direct Method

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

Short- Cut Method

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

60

$= \frac{1810}{70}$

= 25.86 Marks

$= 25 + \frac{[illegible]}{70}$

= 25+ 0.86= 25.86 Marks

समान्तर माध्य (Mean) = 25.86 Marks

समावेशी श्रेणी Inclusive Series)

उदाहरण:- निम्नलिखित समंकों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए-

Marks	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
No. of Student	5	7	10	6	2

हल (Solution):- समान्तर माध्य का परिकलन (Calculation of Arithmetic Mean)

Marks	**F**	**Mid Value=*x***	**f *x***	**d*x***	**f d*x***
1-10	5	5.5	275	-20	-100
11-20	7	15.5	108.5	-10	-70
21-30	10	25.5	255.0	0	0
31-40	6	35.5	213.0	+10	+60
41-50	2	45.5	91.0	+20	+40
Total	N= 30	Σfx =695.0			Σfdx =-70

Direct Method

$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{695}{30}$

= 23.17 Marks

समान्तर माध्य (Mean) = 23.7 marks

Short- Cut Method

$\overline{X}$ = A+ $\frac{\Sigma fdx}{N}$

$= 25.5 + \frac{-70}{30}$

= 25.5-2.33= 23.17 mean

पद विचलन रीति (Step deviation method):- इस रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है जबकि विचलनों को किसी समान संख्या में विभाजित किया जा सके तथा वर्गान्तरों की संख्या

आधक हा। इस ावाध म लघु राात क आधार पर ावचलन ज्ञात करत ह आर ावचलना म समापवर्तक (Common factor) 'i' से भाग दिया जाता है। प्राय: इस विधि का प्रयोग समान वर्गान्तर वाली श्रेणी में किया जाता है। इस रीति से प्रश्न हल करने के लिए निम्नलिखित विधि अपनायी जाती है:-

1. सभी वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु (x) ज्ञात करते हैं।
2. श्रेणी के लगभग बीच के सभी वर्गान्तर के मध्य बिन्दु को कल्पित माध्य मान कर प्रत्येक वर्गान्तर के मध्य बिन्दु से विचलन (dx) ज्ञात करते हैं ऐसा करते समय धनात्मक और ऋणात्मक चिन्हों का ध्यान रखना चाहिए।
3. इन विचलनों को ऐसी संख्या से विभाजित कर देते हैं जिसका सभी में भाग चला जाए। व्यवहार में कल्पित मूल्य के सामने के पद विचलन के खाने में 0 लिखकर ऊपर की ओर -1, -2, -3 आदि व नीचे की ओर +1, +2, +3 आदि लिख देते हैं। ये ही पद विचलन होते हैं (dx')
4. इसके पश्चात् पद विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात कर लेते है। ($\sum fdx'$)
5. इस प्रकार ज्ञात गुणनफल के योग में आवृत्तियों की कुल संख्या का भाग दे देते हैं।
6. पद विचलन रीति अपनाने पर निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं:-

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} Xi$$

जहाँ $\overline{X}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

i = वर्गान्तर

dx' = पद विचलन (Step deviation)

$\sum fdx'$ = पद विचलनों और आवृत्तियों के गुणनफल का योग।

उदाहरण:- निम्न सारणी से समान्तर माध्य पद विचलन रीति से ज्ञात कीजिए।

Marks (out of 50) 0-10 10-20 20-
30 30-40 40-50

No. of
Student 2 3 8 4
3

हल (Solution):-

Marks	M.V.= x	No. of students (f)	dx' A= 25	fd$x$'

		(f)	A= 25	
0-10	5	2	-2	-4
10- 20	15	3	-1	-3
20-30	25	8	0	0
30-40	35	4	+1	+4
40-50	45	3	+2	+6
Total		N= 20		$\sum fdx'$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fdx'}{N} xi$$

$$= 25 + \frac{3}{20} x10$$

$$= 25 + \frac{30}{20}$$

= 25+ 1.5

समान्तर माध्य = 26.5

अशुद्ध मूल्य को शुद्ध करना:- जब गणना करने में त्रुटि हो जाती है तो समान्तर माध्य भी गलत हो जाता है। उसका सही मूल्य ज्ञात करने हेतु सूत्र का प्रयोग करते है। सूत्र द्वारा कुल मूल्य ज्ञात कर उसमें आवश्यक शुद्धि की जाती है। तत्पश्चात् सही समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण:- 100 छात्रों के औसत प्राप्तांक 40 थे। बाद में पता चला कि एक विद्यार्थी के 74 के स्थान पर गलती से 14 अंक पढ़े गये। सही समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

Solution:-

यहाँ- $\overline{X} =$ 40 और N=100 और 74 के स्थान पर 14 पढ़े गये।

कुल अंक (Total Marks) $(\sum x)$ = $\overline{X}$ x N= 40x100= 4000 marks

सही अंक (Corrected) $(\sum x)$ = 4000-14+74= 4060 marks

Corrected $\overline{X} =$ 4060÷100=40.60 marks

सामूहिक समान्तर माध्य (Combined Arithmetic Mean):- यदि अनेक श्रेणियों में पृथक-पृथक समान्तर माध्य ज्ञात है और उसे मिलाकर सामूहिक माध्य ज्ञात करने की आवश्यकता हो तो उन अलग-अलग माध्यों की सहायता से सामूहिक माध्य ज्ञात कर सकते है। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

सामूहिक माध्य (Combined Mean) $(\overline{X}_{123}............n)$

$$= \frac{\overline{X}_1 N_1 + \overline{X}_2 N_2 + \overline{X}_3 N_3 ....\overline{X}_n N_n}{}$$

$$= \frac{}{N_1 + N_2 + N_3 + ...N_n}$$

यहाँ- $\overline{X}_{123}$ = सामूहिक माध्य (Combined Mean)

N_1 , N_2 = पदों की संख्या प्रथम, द्वितीय समूह इत्यादि में (No. of Item for first group, second group and so on)

$\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ = प्रथम, द्वितीय समूह इत्यादि का औसत (Average of first group, second group and so on)

उदाहरण 1:- एक आवृत्ति वितरण के तीन भाग हैं जिनकी आवृत्तियाँ 100, 150 तथा 200 है और उनके समान्तर माध्य क्रमश: 25, 15, 10 है। कुल वितरण का सामूहिक माध्य ज्ञात कीजिए।

हल (Solution):-

$$\overline{X}_{123} = \frac{\overline{X}_1 N_1 + \overline{X}_2 N_2 + \overline{X}_3 N_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{25x100 + 15x150 + 10x200}{100 + 150 + 200}$$

$$= \frac{2500 + 2250 + 2000}{450}$$

$$= \frac{6750}{450} = 15$$

सामूहिक माध्य =15

समान्तर माध्य की बीजगणितीय विशेषताएँ (Algebraic Properties of Arithmetic Mean):- समान्तर माध्य की बीजगणितीय विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :-

1. विभिन्न मदों के मूल्यों का समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है। अर्थात् $\sum d = \sum(X - \overline{X}) = 0$
2. समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गों का योग, अन्य किसी मूल्य से लिये गये विचलनों के वर्गों के योग से कम होता है अर्थात् $\sum X^2 \langle \sum x^2$, अत: प्रमाप विचलन की न्यूनतम वर्ग विधि व सह संबंध में समान्तर माध्य की इस विशेषता का प्रयोग किया जाता है।
3. यदि $\overline{X}$, N व $\sum X$ में से कोई दो माप ज्ञात हों तो तीसरा माप ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात् $X = \frac{\sum X}{N} or \sum X = (\overline{X}N) or N = \frac{\sum \overline{X}}{X}$
4. समान्तर माध्य के अर्न्तगत प्रमाप विभ्रम अन्य माध्य की अपेक्षा कम होता है।
5. यदि एक समूह के दो या अधिक भागों के समान्तर माध्य व उसकी संख्या दी गइ

हो तो सामूहिक समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

6. यदि किसी श्रेणी की मदों की समान मूल्य से गुणा करें, भाग दें, जोड़ दें अथवा घटा दें तो समान्तर माध्य पर वैसा ही प्रभाव पड़ता है। जैसे किसी समंक का समान्तर माध्य 20 है यदि इस समंक के पदों के प्रत्येक मूल्य में 2 जोड़ दिया जाय तो नवीन समान्तर माध्य 20+2 अर्थात् 22 हो जायेंगे।

समान्तर माध्य के गुण (Merits of Mean):-

1. **सरल गणना:-** समान्तर माध्य की परिकलन सरल है और इसे एक सामान्य व्यक्ति भी सरलता से समझ सकता है।
2. **सभी मूल्यों पर आधारित:-** समान्तर माध्य में श्रेणी के समस्त मूल्यों का उपयोग किया जाता है।
3. **निश्चित संख्या:-** समान्तर माध्य एक निश्चित संख्या होती जिस पर समय, स्थान व व्यक्ति का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। श्रेणी को चाहे जिस क्रम में लिखा जाए, समान्तर माध्य में कोई अन्तर नहीं होगा।
4. **स्थिरता:-** समान्तर माध्य में प्रतिदर्श (Sample) के उच्चावचन का अन्य माध्य की अपेक्षा प्रभाव पड़ता है अर्थात् एक समग्र में से यदि दैव प्रतिदर्श के आधार पर कई प्रतिदर्श लिये जायें तो उनके समान्तर माध्य समान होंगे।
5. **बीजगणितीय प्रयोग सम्भव:-** समान्तर माध्य की परिगणना में किसी भी साँख्यिकी विश्लेषण में इसका प्रयोग किया जाता है।
6. **शुद्धता की जाँच:-** समान्तर माध्य में चार्लीयर जाँच के आधार पर शुद्धता की जाँच सम्भव है।
7. **क्रमबद्धता और समूहीकरण की आवश्यकता नहीं:-** इसमें मध्यिका के तरह श्रेणी को क्रमबद्ध व व्यवस्थित करने अथवा बहुलक की भॉति विश्लेषण तालिका और समूहीकरण करने की आवश्यकता नहीं।

समान्तर माध्य के दोष (Demerits of Mean):-

1. **श्रेणी के चरम मूल्यों का प्रभाव:-** समान्तर माध्य की गणना में श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व दिया जाता है, अत: इसकी गणना में बहुत बड़े व बहुत छोटे मूल्यों का बहुत प्रभाव पड़ता है।
2. **श्रेणी की आकृति से समान्तर माध्य ज्ञात करना संभव नहीं:-** जिस प्रकार श्रेणी की आकृति को देखकर बहुलक अथवा मध्यिका का अनुमान लगाया जा सकता है, समान्तर माध्य का अनुमान लगाना संभव नहीं।
3. **श्रेणी की सभी मदों का वास्तविक मूल्य ज्ञान होना:-** समान्तर माध्य की गणना के लिए श्रेणी के सभी मूल्यों का ज्ञात होना आवश्यक है। यदि श्रेणी के एक मद का भी मूल्य ज्ञात नहीं है तो समान्तर माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता है।
4. **काल्पनिक संख्या:-** समान्तर माध्य एक ऐसा मूल्य हो सकता है जो श्रेणी की सम्पूर्ण संख्या में मौजूद नहीं हो। जैसे 4, 9 व 20 का समान्तर माध्य 11 है जो श्रेणी के बाहर का मूल्य होने के कारण उसके किसी मूल्य का प्रतिनिधत्व नहीं करता।
5. **हास्यास्पद परिणाम:-** समान्तर माध्य में कभी-कभी हास्यास्पद परिणाम भी निकलते हैं। जैसे किसी गॉव के 5 परिवारों में बच्चों की संख्या 8 हो तो माध्य 1.6 प्राप्त होगा जो हास्यास्पद है, क्योंकि 1.6 बच्चे का कोई अर्थ नहीं होता है।

समान्तर माध्य के उपयोग:- समान्तर माध्य का उपयोग उस दशा में उपयोगी सिद्ध होता है जब

समान्तर माध्य के उपयोग:- समान्तर माध्य का उपयोग उस दशा में उपयोगी सिद्ध होता है जब श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व देना हो व पूर्ण गणितीय शुद्धता की आवश्यकता हो। व्यवहार में इसका प्रयोग सबसे अधिक होता है, क्योंकि इसकी गणना सरलता से की जा सकती है। औसत प्राप्तांक, औसत बुद्धि, औसत आय, औसत मूल्य, औसत उत्पादन, आदि में समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। इसका प्रयोग गुणात्मक अध्ययन के लिए नहीं किया जा सकता है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

1. …………की गणना में श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व दिया जाता है।
2. विभिन्न मदों के मूल्यों का समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों का योग हमेशा …………….. होता है।
3. किसी समंक का समान्तर माध्य 42 है यदि इस समंक क े पदों के प्रत्येक मूल्य में 4 जोड़ दिया जाय तो नवीन समान्तर माध्य …………हो जायेंगे।
4. केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप……………… साँख्यिकी के उदाहरण हैं।
5. साँख्यिकी को वास्तव में…………………… का विज्ञान कहा जाता है।

3.12 मध्यिका (Median):

मध्यिका एक स्थिति संबंधी माध्य है। यह किसी समंक माला का वह मूल्य है जो कि समंक माला को दो समान भागों में विभाजित करता है। दूसरे शब्दों में मध्यिका अवरोही या आरोही क्रम में लिखे हुए विभिन्न मदों के मध्य का मूल्य होता है। जिसके ऊपर व नीचे समान संख्या में मद मूल्य स्थित होते हैं। डॉ ए0एल0 बाउले के अनुसार "यदि एक समूह के पदों को उनके मूल्यों के आधार पर क्रमबद्ध किया जाय तो लगभग बीच का मूल्य ही मध्यिका होता है।" कॉनर के अनुसार- "मध्यिका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें एक भाग में मूल्य मध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में सभी मूल्य उससे कम होते हैं।

3.13 मध्यिका की गणना (Computation of Median) :

मध्यिका की गणना के लिए सर्वप्रथम श्रेणी को व्यवस्थित करना चाहिए। मदों को किसी मापनीय गुण के आधार पर आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते समय मूल्यों से संबंधित सूचना समय, दिन, वर्ष, नाम, स्थान, रोल नम्बर आदि को मूल्यों के आधार पर बदल लिया जाना चाहिए। आरोही क्रम में सबसे पहले छोटे मद को और उसके बाद उससे बड़े को और इसी क्रम में अंत में सबसे बड़े मद को लिखते हैं और अवरोही क्रम से सबसे बड़े मद को, फिर उससे छोटे को और अंत में सबसे छोटे मद को लिखा जाता है।

मध्यिका की गणना विधि: व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series):- इसमें मध्यिका की गणना की विधि इस प्रकार है:-

a. श्रेणी के पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखते हैं।
b. इसके पश्चात् निम्न सूत्र का प्रयोग कर मध्यिका ज्ञात करते हैं:-

$$M = \text{Size of } \frac{(N+1)}{2} \text{ th item}$$

विषम संख्या होने पर (Odd Numbers)

विषम संख्या होने पर (Odd Numbers):-

उदाहरण:- निम्न समंकों की सहायता से मध्यिका की गणना कीजिए:-

9 10 6 8 11

हल: श्रेणी के पदों को आरोही क्रम में रखने पर

6 8 9 10 11

मध्यिका = $\frac{(5+1)}{2}$ वां पद का आकार

अर्थात तीसरा पद ही मध्यिका का मान होगा = 9

सम संख्या होने पर (Even Numbers):- उपयुक्त उदाहरण में संख्या विषम थी। अत: मध्य बिन्दु सरलता से ज्ञात कर लिया गया परन्तु यदि संख्या सम हो तो उसमें एक संख्या जोड़ने पर ऐसी संख्या बन जायेगी जिसमें दो का भाग देने पर हमें सम्पूर्ण संख्या प्राप्त होगी। ऐसी स्थिति में सूत्र का प्रयोग करके वास्तविक स्थिति ज्ञात कर लेनी चाहिए। ततपश्चात् जिन दो संख्याओं के बीच मध्यिका हो, उन संख्याओं के मूल्यों को जोड़कर दो से भाग देना चाहिए। इससे प्राप्त संख्या मध्यिका का वास्तविक मूल्य होगा।

उदाहरण:- निम्न समंकों की सहायता से मध्यिका की गणना कीजिए:-

10 11 6 8 9

हल: श्रेणी के पदों को आरोही क्रम में रखने पर

6 8 9 10 11 15

मध्यिका = $\frac{(9+10)}{2}$ = 9.5

खण्डित श्रेणी (Discrete Series):- खण्डित श्रेणी में मध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न कार्य करना होता है:-

1. पद मूल्यों (Size) को अवरोही अथवा आरोही क्रम में व्यवस्थित करना।
2. श्रेणी में दी गई आवृत्तियों की संचयी आवृत्ति ज्ञात करना।
3. मध्यिका अंक ज्ञात करने के लिए $\frac{N+1}{2}$ सूत्र का प्रयोग करना, यहाँ 'N' का अर्थ आवृत्तियों की कुल संख्या से है।
4. मध्यिका पद को संचयी आवृत्ति से देखना है। मध्यिका पद जिस संचयी आवृत्ति में आता है, उसके सामने वाला पद-मूल्य ही मध्यिका कहलाता है।

उदाहरण:- निम्न समकों की सहायता से माध्यिका की गणना कीजिए:-

छात्रों की संख्या -
6 8 9 10 11 15 16 20 25

अंक
28 20 27 21 22 26 23
24 25

हल : मध्यिका ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम श्रेणी को व्यवस्थित करेंगे। फिर सूत्र का प्रयोग किया जायेगा।

Marks	No. of Student	Cumulative Frequency
20	8	8
21	10	18
22	11	29
23	16	45
24	20	65
25	25	90
26	15	105
27	9	114
28	6	120

मध्यिका (Median) = $\frac{N+1}{2}$ वां पद का आकार

$= \frac{120+1}{2}$

= 60.5

अत: 60.5 वॉ मद 65 संचयी आवृत्ति के सामने अर्थात् 24 रू0 है मध्यिका मजदूरी = 24 रू0 है।

सतत् श्रेणी (Continuous Series) :- सतत् श्रेणी में मध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि अपनायी जाती है:-

1. सबसे पहले यह देखना चाहिए की श्रेणी अपवर्जी है अथवा समावेशी। यदि श्रेणी समावेशी दी गई है तो उसे अपवर्जी में परिवर्तन करना चाहिए।
2. इसके बाद साधारण आवृत्तियों की सहायता से संचयी आवृत्तियाँ (C.F.) ज्ञात करना चाहिए।
3. इसके पश्चात् N/2 की सहायता से मध्यिका मद ज्ञात की जाती है।
4. मध्यिका मद जिस संचयी आवृत्ति में होती है उसी से संबंधित वर्गान्तर मध्यिका वर्ग (Median group) कहलाता है।
5. मध्यिका वर्ग में मध्यिका निर्धारण का आन्तर्गणन निम्न सूत्र की सहायता से

5. [illegible]
किया जाता है:-

$$M = L_1 + \frac{i}{f}(m-c) \text{ or } M = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f}(m-c)$$

M = मध्यिका (Median)

L_1 = मध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

L_2 = मध्यिका वर्ग की उच्च सीमा

f = मध्यिका वर्ग की आवृत्ति

m = मध्यिका मद $(\frac{N}{2})$

C = मध्यिका वर्ग से पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

i = मध्यिका वर्ग का वर्ग विस्तार

6. यदि श्रेणी अवरोही क्रम में दी गई है तो निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

$$M = L_2 - \frac{i}{f}(m-c)$$

अपवर्जी श्रेणी (Exclusive Series):

उदाहरण:- निम्न सारणी से मध्यिका ज्ञात कीजिए।

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
छात्रों की संख्या -	5	8	10	9	8

Marks	No. of Student F	Cumulative Frequency c f
0-5	5	5
5-10	8	13
10-15	10	23
15-20	9	32
20-25	8	40

$M = \frac{N}{2}th$ item (वीं मद) or 40/2= 20^{th} items (वीं मद). यह मद 23 संचयी आवृत्ति में सम्मिलित है जिसका मूल्य =(10-15) रू0 है। सूत्र द्वारा मध्यिका $M = L_1 + \frac{i}{f}(m-c) = 10 + \frac{5}{10}(20-13)$ or 10+3.5=13.5

मध्यिका (Median) = 13.50

समावेशी श्रेणी (Inclusive Series) : जब मूल्य अवरोही क्रम (Descending order) में दिये गए हों-

उदाहरण:- निम्न श्रेणी से मध्यिका की गणना कीजिए।

अंक 25-30 20-25 15-20 10-15 5-10 0-5

छात्रों की संख्या 8 12 20 10 8 2

हल :

Marks	**No. of Student f**	**Cumulative Frequency c f**
25-30	8	8
20-25	12	20
15-20	20	40
10-15	10	50
5-10	8	58
0-5	2	60

$M = \frac{N}{2}$ वीं मद या $\frac{60}{2} =$ 30 वीं मद, जो 40 संचयी आवृत्ति में है, जिसका वर्ग 15-20 है। सूत्र द्वारा : $M = L_2 - \frac{i}{f}(m - c) = 20 - \frac{5}{20}(30 - 20)$

$= 20 - \frac{5}{20} X 10 = 20 - 2.5 = 17.5$ Marks

अतः मध्यिका अंक = 17.5

वर्ग के मध्य मूल्य (Mid Value) दिये होने पर:

उदाहरण:- निम्न समकों की सहायता से मध्यिका का निर्धारण कीजिए।

मध्य बिन्दु (Central Size) 5 15 25 35 45 55 65 75

आवत्ति

(Frequency) 15 20 25 24 12 31 7
1 52

हल : - ऐसे प्रश्नों को सबसे पहले उपखण्डित श्रेणी में परिवर्तित करेंगें। उपयुक्त उदाहरण में वर्गान्तर 10 है। इसका आधा भाग अर्थात् 5 प्रत्येक मध्य बिन्दु से घटाकर व आधा भाग मध्य बिन्दु में जोड़कर वर्ग की निम्न सीमा व उच्च सीमायें मालूम करके प्रश्न को हल किया जायेगा।

Size	**Calculation of Central Value**	**Median F**	**Size C F**
0-10	5	15	15
10-20	15	20	35
20-30	25	25	60
30-40	35	24	84
40-50	45	12	96
50-60	55	31	127
60-70	65	71	198
70-80	75	52	250

$M = \frac{N}{2}$ वीं मद या $\frac{250}{2} = 125$ वीं मद जिसका मूल्य 50-60 मध्यिका वर्ग में है।

सूत्र द्वारा $= M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c)$

$= 50 + \frac{10}{31}(125 - 96)$

$= 50 + \frac{290}{31}$

=50+9.35= 59.35

अतः मध्यिका = 59.35

मध्यिका की विशेषताएँ (Characteristics of Median):

1. मध्यिका एक स्थिति सम्बन्धी माप है।
2. मध्यिका के मूल्य पर अति सीमान्त इकाइयों का प्रभाव बहुत कम होता है।
3. मध्यिका की गणना उस दशा में भी की जा सकती है जब श्रेणी की मदों को संख्यात्मक रूप नहीं दिया जा सकता हो।
4. अन्य माध्यों की भाँति मध्यिका का गणितीय विवेचन सम्भव नहीं है।

5. यदि मदों की संख्या व मध्यिका वर्ग मात्र के विषय में सूचना दी हुई है, तो भी मध्यिका की गणना संभव है अर्थात् अपूर्ण सूचना से भी मध्यिका मूल्य का निर्धारण संभव है।

मध्यिका के गुण (Merits of Median)

1. बुद्धिमत्ता, सुन्दरता एवं स्वस्थता आदि गुणात्मक विशेषताओं के अध्ययन के लिए अन्य माध्यों की अपेक्षा मध्यिका श्रेष्ठ समझा जाता है।
2. मध्यिका पर अति सीमांत और साधारण मदों का प्रभाव नहीं पड़ता है।
3. मध्यिका को ज्ञात करना सरल और सुविधाजनक रहता है। इसकी गणना करना एक साधारण व्यक्ति भी सरलता से समझ सकता है।
4. कभी-कभी तो मध्यिका की गणना निरीक्षण मात्र से ही की जा सकती है।
5. मध्यिका को बिन्दुरेखीय पद्धति से भी ज्ञात किया जा सकता है।
6. मध्यिका की गणना करने के लिए सम्पूर्ण समंकों की आवश्यकता नहीं होती है। केवल मदों की एवं मध्यिका वर्ग का ज्ञान पर्याप्त है।
7. यदि आवृत्तियों की प्रवृत्ति श्रेणी के मध्य समान रूप से वितरित होने की हो तो मध्यिका को एक विश्वसनीय माध्य माना जाता है।
8. मध्यिका सदैव निश्चित एवं स्पष्ट होता है व सदैव ज्ञात किया जा सकता है।
9. मध्यिका अधिकतर श्रेणी में दिये गये किसी मूल्य के समान ही होता है।

मध्यिका के दोष (Demerits of Median):

1. मध्यिका की गणना करने के लिए कई बार श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना होता है, जो कठिन है।
2. यदि मध्यिका तथा मदों की संख्या दी गई हो तो भी इनके गुणा करने पर मूल्यों का कुल योग प्राप्त नहीं किया जा सकता।
3. मदों का अनियमित वितरण होने पर मध्यिका प्रतिनिधि अंक प्रस्तुत नहीं करता व भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकालते हैं।
4. जब मदों की संख्या सम है तो मध्यिका का सही मूल्य ज्ञात करना संभव नहीं हो पाता है। ऐसी स्थिति में मध्यिका का मान अनुमानित ही होता है।
5. सतत् श्रेणी में मध्यिका की गणना के लिए आन्तर्गणन का सूत्र प्रयुक्त किया जाता है, जिसकी मान्यता है कि वर्ग की समस्त आवृत्तियाँ पूरे वर्ग में समान रूप से फैली हुई है, जबकि वास्तव में ऐसा न होने पर निष्कर्ष अशुद्ध और भ्रामक होते हैं।
6. जब बड़े एवं छोटे मदों को समान भार देना हो तो यह माध्य अनुपयुक्त है, क्योंकि यह छोटे और बड़े मदों को छोड़ देता है।
7. मध्यिका का प्रयोग गणितीय क्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।
8. मध्यिका ज्ञात करते समय, यदि इकाईयों की संख्या में वृद्धि की जाय तो इसका मूल्य बदल जायेगा।

मध्यिका की उपयोगिता : जिन तथ्यों की व्यक्तिगत रूप से पृथक-पृथक तुलना नहीं की जा सकती अथवा जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है, उनकी तुलना के लिए मध्यिका का प्रयोग बहुत उपयोगी है। इसके द्वारा ऐसी समस्याओं का अध्ययन भी संभव होता है, जिन्हें परिणाम में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। उदाहरणार्थ- सुन्दरता, बुद्धिमानी, स्वास्थ्य आदि को परिमाप में व्यक्त नहीं कर सकते। ऐसी स्थिति में जहाँ अति सीमांत मदों को महत्व नहीं दिया जाता हो, यहाँ माध्य उपयुक्त रहता है।

3.14 मध्यिका के सिद्धान्त पर आधारित अन्य माप:-

जिस प्रकार मध्यिका द्वारा एक श्रेणी की अनुविन्यासित मदों को दो बराबर भागों में बाँटा जाता है, उसी प्रकार श्रेणी को चार, पाँच, आठ, दस व सौ बराबर भागों में बाँटा जा सकता है। चार भागों में बॉटने वाला मूल्य चतुर्थांक (Quartiles), पाँच भागों में बॉटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles), आठ भागों वाले मूल्य अष्ठमक (Octiles), दस वाले दशमक (Deciles) व सौ बराबर भागों में बॉटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles) कहलाते है। इन विभिन्न मापों का प्रयोग साँख्यिकीय विश्लेषण में किया जाता है। ये मापें अपनी स्थिति के आधार पर निर्धारित की जाती जिनका विवेचन निम्न खण्डों में किया गया है:-

1. **चतुर्थांक Quartiles):-** यह एक अत्यधिक महत्वपूर्ण माप है जो सबसे अधिक प्रयोग में आता है। जब किसी अनुविन्यासित श्रेणी को चार समान भागों में बाँटा जाना हो तो उसमें तीन चतुर्थांक होंगें। प्रथम चतुर्थांक को निचला चतुर्थांक (Lower Quartile), दूसरे चतुर्थांक को मध्यिका तथा तृतीय चतुर्थांक को उच्च चतुर्थांक (Upper Quartile) कहते हैं।
2. **पंचमक (Quintiles):-** श्रेणी को पाँच बराबर भागों में बॉटने पर चार पंचमक होंगे, जिन्हें क्रमश: Q_{n1}, Q_{n2}, Q_{n3}, Q_{n4} द्वारा व्यक्त किया जाता है।
3. **अष्टमक (Octiles):-** श्रेणी का आठ बराबर भागों में बॉटने पर सात अष्टमक होंगे जिन्हें - O_1, O_2, O_3 .... O_7
4. **दशमक (Deciles) :-** श्रेणी को दस बराबर भागों में बॉटने पर 9 दशमक होंगे, इन्हें D_1, D_2, ... D_9 द्वारा व्यक्त किया जाता है।
5. **शतमक (Percentiles):-** श्रेणी को सौ बराबर भागों में बॉटने पर 99 शतमक होंगे। इन्हें P_1, P_2, P_3 .... P_{99} द्वारा व्यक्त किया जाता है।

द्वितीय चतुर्थांक (Q_2) चौथे अष्टमक (Q_4) पाँचवें दशमक (D_5) तथा पचासवें शतमक (P_{50}) का मूल्य मध्यिका मूल्य कहलाता है।

3.15 बहुलक (Mode):

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है, बहुलक कहलाता है। अंग्रेजी भाषा का 'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के 'La Mode' से बना है, जिसका अर्थ फैशन या रिवाज में होने से है। जिस वस्तु का फैशन होता है, अधिकांश व्यक्ति प्राय: उसी वस्तु का प्रयोग करते हैं, अत: साँख्यिकी में बहुलक श्रेणी वह चर मूल्य है जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक होती है और जिसके चारों मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति सबसे अधिक होती है। बॉडिंगटन के अनुसार- "बहुलक को महत्वपूर्ण प्रकार, रूप या पद के आकार या सबसे अधिक घनत्व वाले मूल्य के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।" बहुलक के जन्मदाता जिजेक के अनुसार- "बहुलक पद मूल्यों की किसी श्रेणी में सबसे अधिक बार आने वाला एक ऐसा मूल्य है, जिसके चारों ओर अन्य पद सबसे घने रूप में वितरित होते हैं।"

क्रॉक्सटन एवं काउडेन के शब्दों में- "बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधि होता है।"

3.16 बहुलक की गणना (Calculation of Mode):

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) :- अवर्गीकृत तथ्यों के संबंध में बहुलक ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं:-

i. निरीक्षण विधि।
ii. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित या सतत श्रेणी में परिवर्तित करके।
iii. माध्यों के अंर्तसंबंध द्वारा।

निरीक्षण द्वारा (By Inspection) :- अवर्गीकृत तथ्यों का निरीक्षण करके यह निश्चित किया जाता है कि कौन सा मूल्य सबसे अधिक बार आता है अर्थात् कौन सा मूल्य सबसे अधिक प्रचलित है। जो मूल्य सबसे अधिक प्रचलित होता है, वही इन तथ्यों का बहुलक मूल्य होता है।

उदाहरण:- निम्नलिखित संख्याओं के समूहों के लिए बहुलक ज्ञात कीजिए।

i. 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6, 2, 3, 5, 4, 7
ii. 51.6, 48.7, 53.3, 49.5, 48.9, 51.6, 52, 54.6, 54, 53.3,
iii. 80, 110, 40, 30, 20, 50, 100, 60, 40, 10, 100, 80, 120, 60, 50, 70

हल :- उपर्युक्त संख्याओं को निरीक्षण करने से ज्ञात होता है कि –

i. 5 संख्या सबसे अधिक बार (चार बार) आया है, अत: बहुलक = 5 है।
ii. 53.3 व 51.6 दोनों ही संख्याएँ दो-दो बार आवृत्त हुआ है, अत: यहाँ पर दो बहुलक (53.3 व 51.6) हैं। इस श्रेणी को द्वि-बहुलक (Bi-Modal) श्रेणी कहते हैं।
iii. 40, 50, 60, 80, 100 संख्याएँ दो-दो बार आवृत्त होती है। हम यह कह सकते हैं कि यहाँ पर पाँच बहुलक हैं। इसे बहु-बहुलक (Multi Modal) श्रेणी कहते हैं। इस स्थिति में यह कहना अधिक उपयुक्त होगा कि बहुलक विद्यमान नहीं है।

अवर्गीकृत तथ्यों का वर्गीकरण करके:- यदि प्रस्तुत मूल्यों की संख्या बहुत अधिक होती है तो बहुलक का निरीक्षण द्वारा निर्धारण करना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में व्यक्तिगत मूल्यों को आवृत्ति वितरण के रूप में खण्डित या सतत् श्रेणी में परिवर्तित कर लेते हैं। तत्पश्चात् खण्डित या सतत् श्रेणी से बहुलक निर्धारित करते हैं। बहुलक ज्ञात करने की यह रीति अधिक विश्वसनीय एवं तर्क संगत है।

माध्यों के अंर्तसंबंध द्वारा- यदि समंक वितरण सममित है अथवा आंशिक रूप से विषम है तो सम्भावित बहुलक मूल्य का निर्धारण इस रीति द्वारा किया जाता है। एक सममित समंक वितरण में समान्तर माध्य, मध्यिका व बहुलक $(\overline{X}, M, Z)$ का मूल्य समान होता है अर्थात् $\overline{X} = M = Z$ यदि वितरण आंशिक रूप से विषम या असममित हो तो इन तीनों माध्यों के मध्य औसत संबंध इस प्रकार होता है-

$$(\overline{X} - Z) = 3(\overline{X} - M) or Z = 3M - 2\overline{X}$$

बहुलक = 3x मध्यिका - 2x समान्तर माध्य

खण्डित श्रेणी में बहुलक:- इस श्रेणी में बहुलक मूल्य निरीक्षण द्वारा एवं समूहीकरण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

निरीक्षण द्वारा (By Inspection) :- यदि आवृत्ति बंटन नियमित हो तथा उनके पद मूल्य सजातीय हों तो निरीक्षण मात्र से ही बहुलक का निर्धारण किया जा सकता है। जिस मूल्य की आवृत्ति सबसे अधिक होती है वही मूल्य बहुलक माना जाता है। नियमित से आशय आवृतियों के ऐसे वितरण से है जहाँ प्रारम्भ में वे बढ़ते क्रम में हों, मध्य में अधिकतम एवं फिर वे घटते क्रम में हो जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण से सरलता से समझा जा सकता है-

उदाहरण:- निम्नलिखित समंकों से बहुलक की गणना कीजिए।

अंक (5 में से)	0	1	2	3	4	5
छात्रों की संख्या	5	8	13	5	2	1

हल :- उपर्युक्त आवृत्ति वितरण से स्पष्ट ज्ञात होता है कि 2 प्राप्तांक की आवृत्ति 13 है जो सर्वाधिक है, अत: 2 प्राप्तांक बहुलक होगा। यहाँ पर आवृत्तियाँ पहले बढ़ते क्रम में हैं, मध्य में सर्वाधिक तथा फिर घटते क्रम में है। अत: यह नियमित आवृत्ति वितरण का उदाहरण है।

समूहीकरण द्वारा (By Grouping) :- जब श्रेणी में अनियमितता हो अथवा दो या इससे अधिक मूल्यों की आवृत्ति सबसे अधिक हो तो यह निश्चित करना कठिन होता है कि किस मूल्य को बहुलक माना जाय। ऐसी स्थिति में ‘समूहीकरण’ द्वारा बहुलक ज्ञात करना उपयुक्त रहता है। समूहीकरण रीति द्वारा बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्न तीन कार्य करने होते हैं:-

i. समूहीकरण सारणी बनाना।
ii. विश्लेषण सारणी बनाना।
iii. बहुलक ज्ञात करना।

यहाँ पर हम लोग मात्र निरीक्षण विधि द्वारा बहुलक (Mode) ज्ञात करने की प्रक्रिया का अध्ययन करेंगें।

अखण्डित या सतत् श्रेणी (Continuous Series) में बहुलक ज्ञात करना:- सतत् श्रेणी में बहुलक निश्चित करते समय सर्वप्रथम निरीक्षण द्वारा सबसे अधिक आवृत्ति वाले पद को बहुलक वर्ग के लिए चुन लेते हैं। बहुलक वर्ग में बहुलक मूल्य ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है:-

उपर्युक्त सूत्रों में प्रयुक्त विभिन्न चिन्हों के अर्थ इस प्रकार है:-

Z = बहुलक

L_1 = बहुलक वर्ग की अधर (Lower Limit) सीमा।

i = बहुलक वर्ग का वर्ग विस्तार या वर्गान्तर।

D_1 = प्रथम वर्ग अंतर (Delta) = Difference one (f_1-f_0)

D_2 = द्वितीय वर्ग अंतर (Delta) = Difference two (f_1-f_2)

उदाहरण- निम्नलिखित समंकों से बहुलक मूल्य ज्ञात कीजिए:-

वर्ग आकार -	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बारम्बारता	2	6	15	8	6

इस श्रेणी के निरीक्षण से ज्ञात होता है कि श्रेणी का 10-15 वर्ग बहुलक वर्ग है, क्योंकि इस वर्ग की आवृत्ति सर्वाधिक है। इस प्रकार

$$Z = L_1 + \frac{D_1}{D_1 + D_2} x i$$

यहाँ $D_1 = f_1 - fo = 15 - 6 = 9$

$D_2 = f_1 - f_2 = 15 - 8 = 7$

$$= 10 + \frac{9}{9+7} x 5$$

$$= 10 + \frac{45}{16}$$

$= 10 + 2.81$

$= 12.81$

बहुलक = 12.81

बहुलक की प्रमुख विशेषताएँ (Principal Characteristics of Mode) :-

1. बहुलक मूल्य पर असाधारण इकाईयों का प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् इस माध्य पर श्रेणी के उच्चतम व निम्नतम अंकों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।
2. वास्तविक बहुलक के निर्धारण के लिए पर्याप्त गणना की आवश्यकता होती है। यदि आवृत्ति वितरण अनियमित है तो बहुलक का निर्धारण करना भी कठिन होता है।
3. बहुलक सर्वाधिक घनत्व वाला बिन्दु होता है, अत: श्रेणी के वितरण का अनुमान सरलता से लगाया जा सकता है।
4. बहुलक के लिए बीजगणितय विवेचन करना संभव नहीं होता।
5. सन्निकट बहुलक आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

बहुलक के गुण (Advantages of Mode) :-

i. **सरलता:-** बहुलक को समझना व प्रयोग करना दोनों सरल हैं। कभी-

कभी इसका पता निरीक्षण द्वारा ही लगाया जा सकता है।

ii. **श्रेष्ठ प्रतिनिधित्व:-** बहुलक मूल्य के चारों ओर समंक श्रेणी के अधिकतम मूल्य केन्द्रित होते है। अत: समग्र के लक्षणों तथा रचना पर भी कुछ प्रकाश पड़ता है।

iii. **थोड़े मदों की जानकारी से भी बहुलक गणना सम्भव:-** बहुलक को गणना के लिए सभी मदों की आवृत्तियाँ जानना आवश्यक नहीं केवल बहुलक वर्ग के पहले और बाद वाले वर्ग की आवृत्तियाँ ही पर्याप्त है।

iiii. **बिन्दु रेखीय प्रदर्शन सम्भव:-** बहुलक का प्रदर्शन रेखा चित्र से संभव है।

v. **चरम मूल्यों से कम प्रभावित:-** इसके मूल्य पर चरम मदों का प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि यह सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है।

vi. **सर्वाधिक उपयोगी मूल्य:-** बहुलक एक व्यावहारिक माध्य है, जिसका सार्वभौमिक उपयोग है।

vii. **विभिन्न न्यादर्शो में समान निष्कर्ष:-** समग्र से सदैव निदर्शन द्वारा चाहे जितना न्यादर्श लिये जाय उनसे प्राप्त बहुलक समान रहता है।

बहुलक के दोष:-

1. **अनिश्चित तथा अस्पष्ट:-** बहुलक ज्ञात करना अनिश्चित तथा अस्पष्ट रहता है। कभी-कभी एक ही समंकमाला से एक से अधिक बहुलक उपलब्ध होते हैं।
2. **चरम मूल्यों का महत्व नहीं:-** बहुलक में चरम मूल्यों को कोई महत्व नहीं दिया जाता।
3. **बीजगणितीय विवेचन कठिन:-** बहुलक का बीजगणितीय विवेचन नहीं किया जा सकता, अत: यह अपूर्ण है।
4. **वर्ग विस्तार का अधिक प्रभाव:-** बहुलक की गणना में वर्ग विस्तार का बहुत प्रभाव पड़ता है। भिन्न-भिन्न वर्ग विस्तार के आधार पर वर्गीकरण करने पर बहुलक भी भिन्न-भिन्न आते हैं।
5. **कुल योग प्राप्त करना कठिन:-** बहुलक को यदि मदों की संख्या से गुणा कर दिया जाय तो मदों के कुल मूल्यों का योग प्राप्त नहीं किया जा सकता।
6. **क्रमानुसार रखना:-** इसमें मदों को क्रमानुसार रखना आवश्यक है, इसके बिना बहुलक ज्ञात करना सम्भव नहीं होता है।

3.17 समान्तर माध्य, मध्यिका तथा बहुलक के बीच संबंध:-

एक सममित श्रेणी (Symmetrical Series) ऐसी श्रेणी होती है, जिसमें समान्तर माध्य, मध्यिका व बहुलक का एक ही मूल्य होता है। एक विषम श्रेणी में तीनों माध्य समान नहीं होते हैं, परन्तु विषम श्रेणी में भी मध्यिका, समान्तर माध्य व बहुलक के बीच की दूरी की औसतन एक तिहाई होती है।

इसका सूत्र इस प्रकार है:-

$$Z = \overline{X} - 3(\overline{X} - M) or Z = 3M - 2\overline{X}$$

$$M = Z + \frac{2}{3}(\overline{X} - Z)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{2}(3M - Z)$$

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

6. एक …………..श्रेणी (Series) में समान्तर माध्य, मध्यिका व बहुलक का एक ही मूल्य होता है।

7. ……………..किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है।

8. सौ बराबर भागों में बॉटने वाले मूल्य ………………कहलाता है।

9. …………..समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

10. चार भागों में बॉटने वाला मूल्य ………………कहलाता है।

3.18 सारांश (Summary):

प्रस्तुत इकाई में आपने साँख्यिकी का अर्थ तथा वर्णनात्मक साँख्यिकी के रूप में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों (Measures of Central Tendency) में समांतर माध्य, मध्यिका व बहुलक का अध्ययन किया। इन सभी अवधारणाओं के बारे में संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

साँख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है तथा यह गणना का विज्ञान है। साँख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है।

वर्णनात्मक साँख्यिकी, किसी क्षेत्र के भूतकाल तथा वर्तमान काल में संकलित तथ्यों का अध्ययन करता है और इनका उद्देश्य विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णनात्मक साँख्यिकी के उदाहरण हैं।

एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को ही माध्य कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उद्देश्य एवं कार्य हैं- सामग्री को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करना, तुलनात्मक अध्ययन के लिए, समूह का प्रतिनिधित्व, अंक गणितीय क्रियाएँ, भावी योजनाओं का आधार, माध्यों के मध्य पारस्परिक संबंध ज्ञात करने के लिए आदि।

किसी भी आदर्श माध्य में गुण होनी चाहिए:- प्रतिनिधित्व, स्पष्टता एवं स्थिरता, निश्चित निर्धारण, सरलता व शीघ्रता, परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव, निरपेक्ष संख्या आदि।

साँख्यिकीय में मुख्यत: निम्न माध्यों का प्रयोग होता है:-

IIII. स्थिति सम्बन्धी माध्य (Averages of position)

[illegible] (Averages of position)

a. बहुलक (Mode)

b. मध्यिका (Median)

V. गणित सम्बन्धी माध्य (Mathematical Average)

a. समान्तर माध्य (Arithmetic Average or mean)

b. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

c. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

d. द्विघात या वर्गीकरण माध्य (Quadratic Mean)

VI. व्यापारिक माध्य (Business Average)

a. चल माध्य (Moving Average)

b. प्रगामी माध्य (Progressive Average)

c. संग्रहीत माध्य (Composite Average)

किसी समंक श्रेणी का समान्तर माध्य उस श्रेणी के मूल्यों को जोड़कर उसकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं-

3. सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)
4. भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य की गणना करने के लिए दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है:-

iii. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

iiii. लघु रीति (Short-cut Method)

मध्यिका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है, जिसमें एक भाग में मूल्य मध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में सभी मूल्य उससे कम होते हैं। जिन तथ्यों की व्यक्तिगत रूप से पृथक-पृथक तुलना नहीं की जा सकती अथवा जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है, उनकी तुलना के लिए मध्यिका का प्रयोग बहुत उपयोगी है। इसके द्वारा ऐसी समस्याओं का अध्ययन भी संभव होता है, जिन्हें परिणाम में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

जिस प्रकार मध्यिका द्वारा एक श्रेणी की अनुविन्यासित मदों को दो बराबर भागों में बाँटा जाता है, उसी प्रकार श्रेणी को चार, पाँच, आठ, दस व सौ बराबर भागों में बाँटा जा सकता है। चार भागों में बॉटने वाला मूल्य चतुर्थांक (Quartiles), पाँच भागों में बॉटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles), आठ भागों वाले मूल्य अष्ठमक (Octiles), दस वाले दशमक (Deciles) व सौ बराबर भागों में बॉटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles) कहलाते है। इन विभिन्न मापों का प्रयोग साँख्यिकीय विश्लेषण में किया जाता है।

बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है। यह मूल्य श्रेणी के मूल्यों का सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधि होता है।

अवर्गीकृत तथ्यों के संबंध में बहुलक ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं:-

iiii. निरीक्षण विधि।

v. व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित या सतत श्रेणी में परिवर्तित करके।

vi. माध्यों के अंर्तसंबंध द्वारा।

एक सममित श्रेणी (Symmetrical Series) ऐसी श्रेणी होती है, जिसमें समान्तर माध्य, मध्यिका व

बहुलक का एक ही मूल्य होता है। एक विषम श्रेणी में तीनों माध्य समान नहीं होते हैं, परन्तु विषम श्रेणी में भी मध्यिका, समान्तर माध्य व बहुलक के बीच की दूरी की औसतन एक तिहाई होती है। इसका सूत्र है:- $Z = \overline{X} - 3(\overline{X} - M) or Z = 3M - 2\overline{X}$

3.19 शब्दावली (Glossary):

साँख्यिकी (Statistics): साँख्यिकी अनुमानों और संभावनाओं का विज्ञान है तथा यह गणना का विज्ञान है। साँख्यिकी को सही अर्थ में माध्यों का विज्ञान कहा जाता है।

वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive Statistics): वर्णनात्मक साँख्यिकी संकलित तथ्यों का विवरणात्मक सूचना प्रदान करना होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, विवरणात्मक या वर्णनात्मक साँख्यिकी के उदाहरण हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप (Measures of Central Tendency): एक समंक श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का आशय उस समंक श्रेणी के अधिकांश मूल्यों की किसी एक मूल्य के आस-पास केन्द्रित होने की प्रवृत्ति से है, जिसे मापा जा सके और इस प्रवृत्ति के माप को माध्य भी कहते हैं ।

मध्यिका (Median): मध्यिका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

चतुर्थांक (Quartiles): चार भागों में बॉटने वाला मूल्य चतुर्थांक (Quartiles)।

पंचमक (Quintiles): पाँच भागों में बॉटने वाला मूल्य पंचमक (Quintiles)।

अष्ठमक (Octiles): आठ भागों वाले मूल्य अष्ठमक (Octiles)।

दशमक (Deciles): दस भागों वाले मूल्य दशमक (Deciles)।

शतमक (Percentiles): सौ बराबर भागों में बॉटने वाले मूल्य शतमक (Percentiles)।
बहुलक (Mode): बहुलक किसी आवृत्ति वितरण का वह मूल्य है जिसके चारों ओर मदों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति बहुत अधिक होती है।

3.20 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर:

1. समान्तर माध्य 2. शून्य 3. 46 4. विवरणात्मक या वर्णनात्मक 5. माध्यों 6. सममित 7. बहुलक 8. शतमक (Percentiles) 9. मध्यिका 10. चतुर्थांक (Quartiles)

3.21 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री (References/ Useful Readings):

1. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
2. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.
3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
4. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
5. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
6. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
7. शर्मा, आर०ए० (2001) :शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ,

3.22 निबंधात्मक प्रश्न

1. साँख्यिकी का अर्थ बताइए तथा वर्णनात्मक साँख्यिकी के महत्व का वर्णन कीजिए।

2. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों विभिन्न मापकों की तुलना कीजिए।

3. केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों के महत्व का वर्णन कीजिए।

4. निम्नलिखित समंकों से समान्तर माध्य, मध्यिका, व बहुलक का मूल्य ज्ञात कीजिए:- (उत्तर : समान्तर माध्य =67.5, मध्यिका = 69.32, बहुलक = 72.96)

वर्ग अंतराल	90-94	85-89	80-84	75-79	70-74	65-69	60-64	55-59	50-54	45-49	40-44
बारंबारता	1	4	2	8	14	6	6	6	4	3	3

इकाई संख्या 4: वर्णनात्मक साँख्यिकी: विचरणशीलता के मापक, चतुर्थांक, शतांक, विभिन्न प्रासंगिक प्रतिदर्शजों की मानक त्रुटियाँ (Descriptive Statistics: Measures of Variability or Dispersion, Quartiles, Percentiles, Standard Errors of Various Relevant Statistics)

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

4.2 उद्देश्य

4.3 विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ :

4.4 अपकिरण की मापें

4.5 अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्व

4.6 अपकिरण के विभिन्न माप

4.7 विस्तार

4.8 अन्तर चतुर्थांक विस्तार

4.9 शतमक विस्तार

4.10 चतुर्थांक विचलन या अर्द्ध अन्तर-चतुर्थांक विस्तार

4.11 माध्य विचलन या प्रथम घात का अपकिरण

4.12 प्रमाप विचलन

4.13 अपकिरण के विभिन्न मापों के मध्य संबंध

4.14 मानक त्रुटि

4.15 सारांश
4.16 शब्दावली
4.17 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर
4.18 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
4.19 निबंधात्मक प्रश्न

4.1 प्रस्तावना :

इससे पहले आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के बारे में यह जाना कि माध्य एक श्रेणी का प्रतिनिधि मूल्य होता है। यह मूल्य उस श्रेणी की माध्य स्थिति या सामान्य स्थिति का परिचायक मात्र होता है। माध्य मूल्य के आधार पर समंक श्रेणी की बनावट, संरचना, पद मूल्यों का माध्य मूल्य के संदर्भ में विखराव या फैलाव आदि के संदर्भ में जानकारी करना संभव नहीं है। अत: केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के आधार पर साँख्यिकीय तथ्यों का विश्लेषण व निष्कर्ष प्राय: अशुद्ध व भ्रामक होता है। साँख्यिकीय विश्लेषण की शुद्धता के लिए विचरणशीलता के मापक को समझना अत्यंत आवश्यक है। प्रस्तुत इकाई में आप विचरणशीलता के मापकों, चतुर्थांक, शतांक तथा प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटियों का अध्ययन करेंगे।

4.2 उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ बता पायेंगें।
- विचरणशीलता के महत्व का वर्णन कर सकेंगे।
- विचरणशीलता की प्रकृति को बता पायेंगें।
- विचरणशीलता के संप्रत्यय की व्याख्या कर सकेंगे।
- विचरणशीलता के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
- चतुर्थांक मापक का परिकलन कर सकेंगे।
- शतांक मापक का परिकलन कर सकेंगे।
- प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटियों का परिकलन कर सकेंगे।
- विचरणशीलता के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।

4.3 विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ (Meaning of Variability or Dispersion) :

विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपकिरण किसी श्रेणी के पद-मूल्यों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपकिरण कहते हैं। ब्रुक्स तथा डिक के मतानुसार "एक केन्द्रीय

मूल्य के दोनों ओर पाये जाने वाले चर मूल्यों के विचलन या प्रसार की सीमा ही अपकिरण है।" अपकिरण (Dispersion) को विखराव (Scatter), प्रसार (Spread) तथा विचरण (Variation) आदि नामों से जाना जाता है।

4.4 अपकिरण की मापें (Measures of Dispersion):

अपकिरण को निम्न प्रकार से मापा जा सकता है:-

i. **निरपेक्ष माप (Absolute Measures)** :- यह माप अपकिरण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं, जैसे- रूपये, मीटर, लीटर इत्यादि। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।

ii. **सापेक्ष माप (Relative Measures):-** सापेक्ष अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता हे। दो यो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

4.5 अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्व (Objectives and importance of Dispersion):

अपकिरण के विभिन्न माप के निम्नलिखित उद्देश्य एवं महत्व हैं -

i. संमक श्रेणी के माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों की औसत दूरी ज्ञात करना।

ii. समंक श्रेणी की बनावट के बारे में जानकारी प्रदान करना अर्थात् यह ज्ञात करना कि माध्य के दोंनों ओर पद-मूल्यों का विखराव या फैलाव कैसा है।

iii. समंक- श्रेणी के विभिन्न पद-मूल्यों का सीमा विस्तार ज्ञात करना।

iiii. दो या दो से अधिक समंक श्रेणियों में पायी जाने वाली असमानताओं या बनावट में अन्तर का तुलनात्मक अध्ययन करना तथा यह निश्चित करना कि किस समंक श्रेणी में विचरण की मात्रा अधिक है।

v. यह जाँचना कि माध्य द्वारा समंक श्रेणी का किस सीमा तक प्रतिनिधित्व होता है। इस प्रकार अपकिरण की मापें माध्यों की अनुपूरक होती हैं।

4.6 अपकिरण के विभिन्न माप (Different Measures of Dispersion):

अपकिरण ज्ञात करन े की विभिन्न रीतियाँ निम्न चार्ट में प्रस्तुत है:-

सीमा रीतियाँ (Methods of Limits)	**विचलन माध्य रीतियाँ (Methods of Average Deviation)**
1. विस्तार (Range) 2. अन्तर-चतुर्थांक विस्तार (Inter-Quartile Range) 3. शतमक विस्तार (Percentile Range) 4. चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation)	1. माध्य विचलन (Mean Deviation) 2. प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

4.7 विस्तार (Range) :

किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं। यह अन्तर यदि कम है तो श्रेणी नियमित या स्थिर कहलायेगी। इसके विपरीत यदि यह अन्तर अधिक है तो श्रेणी अनियमित कहलाती है। यह अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल परन्तु अवैज्ञानिक रीति है।

विस्तार की परिगणना:- अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों का अन्तर विस्तार कहलाता है। विस्तार ज्ञात करते समय आवृत्तियों पर ध्यान नहीं दिया जाता है। विस्तार की परिगणना केवल मूल्यों (मापों या आकारों) के अन्तर के आधार पर ही की जाती हैं।

विस्तार = अधिकतम मूल्य - न्यूनतम मूल्य

Range = Highest Value (H)- Lowest Value (L)

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range):- विस्तार का माप निरपेक्ष होता है। इसलिए इसकी तुलना अन्य श्रेणियों से ठीक प्रकार नहीं की जा सकती। इसे तुलनीय बनाने हेतु यह आवश्यक है कि इसे सापेक्ष रूप में व्यक्त किया जाय। इसके लिए विस्तार गुणांक ज्ञात किया जाता है, जिसका सूत्र निम्न है:-

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) = $\frac{H-L}{H+L}$

उदाहरण 01:- निम्नलिखित संख्याओं के समूहों में विस्तार (Range) की गणना कर उनकी तुलना कीजिए।

A = 7, 8, 2, 3, 4, 5

B = 6, 8, 10, 12, 5, 8

C = 9, 10, 12, 13, 15, 20

हल: विस्तार (Range) = अधिकतम मूल्य (H) – न्यूनतम मूल्य (L)

A = 8 – 2 = 6

B = 12 – 5 = 7

C = 20 – 9 = 11

A, B और C संख्याओं के तीन समूहों की तुलना हेतु विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) की परिगणना करनी होगी, जो निम्नवत है:-

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range) = $\frac{H-L}{H+L}$

A = $\frac{8-2}{8+2}=\frac{6}{10}=0.6$

B = $\frac{12-5}{12+5}=\frac{7}{17}=0.41$

C = $\frac{20-9}{20+9}=\frac{11}{29}=0.37$

अत: विस्तार गुणांक A का 0.60, B का 0.41 तथा C का 0.37 है। स्पष्ट है A में विचरणशीलता सर्वाधिक है, जबकि C में न्यूनतम है।

विस्तार के गुण (Merits of Range):-

- इसकी गणना सरल है।
- यह उन सीमाओं को स्पष्ट कर देता है, जिनके मध्य पदों के मूल्य में बिखराव है, अत: यह विचलन का एक विस्तृत चित्र दर्शाता है।
- विस्तार की गणना के लिए आवृत्तियों की आवश्यकता नहीं होती, केवल मूल्यों पर ही ध्यान दिया जाता है। अत: आवृत्तियों से प्रभावित नहीं होता है।

विस्तार के दोष (Demerits of Range):-

- विस्तार एक अवैज्ञानिक माप है, क्योंकि इसमें माध्यों की उपेक्षा की जाती है।
- विस्तार अपकिरण का एक अनिश्चित माप है।
- विस्तार में श्रेणी के सभी मूल्यों पर ध्यान नहीं दिया जाता अत: इसे सभी मूल्यों का प्रतिनिधि मूल्य नहीं कहा जा सकता।

4.8 अन्तर चतुर्थांक विस्तार (Inter Quartile Range):-

किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थांक विस्तार कहते हैं। यह माप आंशिक रूप से विस्तार (Range) के समान ही है। इस माप के अन्तर्गत मध्य की 50% मदों के मूल्यों को ही ध्यान में रखा जाता है। इसकी गणना करते समय आवृत्तियों को भी महत्व दिया जाता है, जबकि विस्तार में आवृत्तियों को ध्यान में नहीं रखते हैं। अन्तर-चतुर्थांक विस्तार अपकिरण का माप होने के साथ-साथ स्थिति का भी मापक है। इसकी परिगणना विधि निम्नवत है:-

i. सर्वप्रथम समंक श्रेणी के प्रथम एवं तृतीय चतुर्थांक ज्ञात किये जायेंगें।
ii. तत्पश्चात् इसे ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:-

अन्तर चतुर्थांक विस्तार (Inter -Quartile Range,IQR) = $Q_3 - Q_1$

उदाहरण 02:- एक परीक्षा में 40 परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त प्राप्तांकों का अन्तर-चतुर्थांक विस्तार ज्ञात कीजिए।

Find out Inter-Quartile Range from the following data regarding marks obtained by 40 students in an examination.

Marks	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	Total
No. of Examinees	5	8	12	9	6	40

हल:- सर्वप्रथम श्रेणी के विभिन्न वर्गों की वास्तविक सीमाएँ ज्ञात कर निम्न प्रकार लिखा जाएगा:-

Marks (X)	**No. of Examinees (f)**	**संचयी बारबारता Cumulative frequency (cf)**
0.5-10.5	5	5
10.5- 20.5	6	13
20.5- 30.5	12	25
30.5- 40.5	9	34
40.5 – 50.5	6	40

Q1 = N/4 वॉ पद $\frac{40}{4}$ = 10 वॉ पद यह वर्ग अन्तराल (10.5- 20.5) के मध्य आता है।सूत्र में सभी मानों को रखने पर

Q1 = $L_1 + \frac{i}{f}(q_1 - c)$

= $10.5 + \frac{10}{8}(10 - 5)$

= 10.5+6.25 or 16.75 अंक

$Q_3 = 3N/4$ वॉ पद या $\frac{3x40}{4} =$ 30 वॉ पद

यह वर्ग अन्तराल (30.5-40-5) के मध्य आता है।

$Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}(q_3 - c)$

$= 30.5 + \frac{10}{9}(30 - 25)$

= 30.5 +5.56 or 36.06 अंक

अन्तर चतुर्थांक विस्तार (IQR) = 36.06-16.75 अथवा 19.31 अंक

अन्तर चतुर्थांक विस्तार (IQR) का गुण (Merits of IQR):

1. विस्तार की भॉति इसकी गणना सरल है। 2. इसमें चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। **अन्तर चतुर्थांक विस्तार (IQR) दोष(Demerits of IQR):**

1. इसे प्रतिनिधि माप नहीं कहा जा सकता क्योंकि यह माप श्रेणी के मध्य के 50 प्रतिशत मूल्यों पर आधारित होता है।

2. यह माप बनावट श्रेणी की बनावट को स्पष्ट नहीं करता

है।   3. इस माप का बीजगणितीय विवेचन संभव नहीं है।

अत: अन्तर-चतुर्थांक विस्तार अपकिरण का संतोषजनक माप नहीं है।

4.9 शतमक विस्तार (Percentile Range):

यह आंशिक विस्तार का ही अन्य माप है। इसका उपयोग शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक मापों में अधिक होता है। शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है। अत: यदि मध्य का 80% मूल्य ज्ञात हो तो भी शतमक विस्तार ज्ञात किया जा सकता है। इसे ज्ञात करने हेतु हम निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगें:-

P.R. = P_{90} - P_{10} (P.R. = Percentile Range, शतमक विस्तार) इस माप को दशमक विस्तार (D_9 - D_1) भी कहा जा सकता है, क्योंकि P_{90} तथा P_{10} क्रमश: D_9 तथा D_1 ही होते हैं।

अत: D.R. = D_9 - D_1 (D.R. = Decile Range = दशमक विस्तार)

D_9 = नवम दशमक (9^{th} Decile) तथा D_1 = प्रथम दशमक (1^{st} Decile)

उदाहरण 03:- उदाहरण संख्या 02 मे प्रस्तुत समंकों से शतमक विस्तार (Percentile Range) की गणना कीजिए।

हल:-

$P_{10} = {}^{10N}\!/_{100}$ or ${}^{10x40}\!/_{100}$

= 4^{th} पद यह संचयी बारंबारता 5 वाले वर्ग अन्तराल (0.5-10.5) के मध्य आता है।

$P_{10} = L_1 + \frac{i}{f}(P_{10} - c)$

$= 0.5 + \frac{10}{5}(4 - 0)$

= 0.5+8 अथवा 8.5 अंक

P.R. = P_{90}- P_{10} = 43.83 - 8.5

= 35.33 अंक

$P_{90} = {}^{90N}\!/_{100}$ या ${}^{90x40}\!/_{100}$

= 36 वॉ पद 1 यह 40 संचयी बारंबारता वाले वर्ग अन्तराल (40.5-50.5) के मध्य आता है।

$P_{90} = L_1 + \frac{i}{f}(P_{90} - c)$

$= 40.5 + \frac{10}{6}(36 - 35)$

= 40.5 + 3.33

= 43.83 अंक

शतमक विस्तार के गुण (Merits of PR):-

1. यह रीति विस्तार एवं अन्तर-चतुर्थांक विस्तार से श्रेष्ठ मानी जाती है, क्योंकि यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है।
2. इसे अधिक सरलता से समझा जा सकता है।

शतमक विस्तार के दोष (Demerits of PR):-

1. एक भी पद के सम्मिलित करने व हटाने से शतमक विस्तार प्रभावित होता है।

1. एक भी पद को सम्मिलित करने व हटाने से शतमक विस्तार प्रभावित होता है।
2. इसके अतिरिक्त इससे श्रेणी की बनावट के बारे में कोई जानकारी नहीं मिलती है और न ही इसका बीजगणितीय विवेचन संभव है।

4.10 चतुर्थांक विचलन या अर्द्ध अन्तर-चतुर्थांक विस्तार (Quartile Deviation or Semi Inter-Quartile Range) :

चतुर्थांक विचलन श्रेणी के चतुर्थांक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थांक के अन्तर का आधा होता है। इसलिए इसे अर्द्ध अन्तर-चतुर्थांक विस्तार भी कहते है। यदि कोई श्रेणी नियमित अथवा सममितीय हो तो मध्यक (M) , तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के ठीक बीच होगा। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation or Q.D.) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$,

Q_3 = तृतीय चतुर्थांक

Q_1 = प्रथम चतुर्थांक

चतुर्थांक विचलन का गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)

Coefficient of Q.D. = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} x \frac{2}{Q_3 + Q_1} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उदाहरण 04 :- निम्न समंकों के आधार पर चतुर्थांक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए।
From the following data find Quartile Deviation and its Coefficient

अंक (X)	4	6	8	10	12	14	16
बारंबारता (f)	2	4	5	3	2	1	4
संचयी बारंबारता (cf)	2	6	11	14	16	17	21

हल:-

Q1 = $\frac{N+1}{4}$ वॉ पद

$= \frac{21+1}{4}$ वॉ पद

= 5.5 वॉ पद

= 6

$Q3 = \frac{D(N+1)}{4}$ वॉ पद

$= \frac{3(21+1)}{4}$ वॉ पद

= 16.5 वॉ पद

= 17

$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{14 - 6}{2} = 4$

Q.D. गुणांक $= \frac{14 - 6}{14 + 6} = 0.40$

वर्गीकृत आँकड़ों का Q.D. निकालने के लिए शतमक या दशमक विस्तार की तरह ही प्रक्रिया अपना कर निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}(q_1 - C) \qquad\qquad Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}(q_3 - C)$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

चतुर्थांक विचलन के गुण (Merits of QR):-

1. चतुर्थांक विचलन की गणना सरल है तथा इसे शीघ्रता से समझा जा सकता है, क्योंकि इसकी गणना में जटिल गणितीय सूत्रों का प्रयोग नहीं करना पड़ता है।
2. यह श्रेणी के न्यूनतम 25% तथा अधिकतम 25% मूल्यों को छोड़ देता है। अत: यह अपकिरण के अन्य मापों की अपेक्षा चरम मूल्यों द्वारा कम प्रभावित होता है।
3. यद्यपि यह श्रेणी की बनावट पर प्रकाश नहीं डालता फिर भी श्रेणी के उन 50% मूल्यों का विस्तार परिष्कृत रूप से प्रस्तुत करता है, जो चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होते है।

चतुर्थांक विचलन के दोष (Demerits of QR):-

1. यह पदों के बिखराव का प्रदर्शन करने में असमर्थ है।
2. यह चरम मूल्यों को महत्व नहीं देता है।
3. इसके आधार पर बीजगणितीय रीतियों का प्रयोग करके विश्लेषण करना संभव नहीं है।
4. निदर्शन के उच्चावचनों (Fluctuations) से यह बहुत अधिक प्रभावित होता है।

इन दोषों को दूर करने के उद्देश्य से ही माध्य विचलन और प्रमाप विचलन की गणना की जाती है।

4.11 माध्य विचलन या प्रथम घात का अपकिरण (Mean Deviation or First Moment of Dispersion):-

माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। ये विचलन बहुलक, मध्यिका या समान्तर माध्य किसी भी एक माध्य से लिये जा सकते हैं। इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़कर दिया जाता है। इस प्रकार माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यिका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है। बीजगणितीय चिन्ह + और – पर स्थान न देकर सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है। इस प्रकार प्राप्त विचलनों को जोड़कर मदों की कुल संख्याओं से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे माध्य विचलन कहते है। माध्य विचलन जितना अधिक होता है उस श्रेणी में अपकिरण या फैलाव उतना ही अधिक होता है। समान्तर माध्य से परिकलित माध्य विचलन को प्रथम घात का अपकिरण (First Moment of Dispersion) भी कहते है। माध्य विचलन की परिगणना हेतु निम्न पदों को अपनाते हैं:-

1. माध्य का चुनाव।
2. बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ना।
3. विचलनों का योग एवं माध्य की गणना।

माध्य विचलन को ग्रीक भाषा δ (Delta Small) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यदि माध्य

ावचलन समान्तर माध्य स ज्ञात करना हा ता $\delta_{x},$ माध्यका स ज्ञात करन पर δ_{m} तथा बहुलक स ज्ञात करने पर δ_{z} संकेताक्षरों का प्रयोग करते हैं। सूत्र के रूप में माध्य विचलन व उसका गुणांक निम्न प्रकार होगा:-

आधार	माध्य विचलन	माध्य विचलन गुणांक
समान्तर माध्य से	$\delta\overline{X} = \frac{\sum \lvert d\overline{X} \rvert}{N}$	Coefficient $\delta\overline{X} = \frac{\delta\overline{X}}{X}$
मध्यिका से	$\delta_{M} = \frac{\sum \lvert d_{M} \rvert}{N}$	Coefficient $\delta_{M} = \frac{\delta_{M}}{M}$
बहुलक से	$\delta_{z} = \frac{\sum \lvert d_{z} \rvert}{N}$	Coefficient $\delta_{z} = \frac{\delta_{z}}{Z}$

यहाँ δ (डेल्टा) ग्रीक भाषा का अक्षर 'Small Delta' है

δ = माध्य विचलन

$d\overline{x}$ = समान्तर माध्य से विचलन

d_M = मध्यिका से विचलन

d_z = बहुलक से विचलन

N = पदों की संख्या

| | = बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ना

उदाहरण 05:- निम्न संख्याओं का समान्तर माध्य से माध्य विचलन व माध्य विचलन से गुणांक ज्ञात कीजिए।

2, 3, 6, 8, 11

हल:- समान्तर माध्य $(\overline{X})$ = $\frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$

माध्य विचलन $(\delta_{\overline{x}})$ = $\frac{|2-6|+|3-6|+|6-6|+|8-6|+|11-6|}{5}$

$$= \frac{|4|+|3|+|0|+|2|+|5|}{5} \quad \text{or} \quad \frac{14}{5} = 2.8$$

अत: समान्तर माध्य से माध्य विचलन $(\delta_{\overline{X}}) = 2.8$

माध्य विचलन गुणांक $\delta \overline{X} = \frac{\delta \overline{X}}{X} = \frac{2.8}{6} = 0.46$

माध्य विचलन के गुण (Merits of MD):-

1. इसकी गणना आसान है।
2. यह मध्यिका, समान्तर माध्य अथवा बहुलक में से किसी को भी आधार मानकर निकाला जा सकता है।
3. यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित है। अत: यह श्रेणी की आकृति पर पूर्ण प्रकाश डालता है।
4. यह श्रेणी के चरम मूल्यों से प्रमाप विचलन की तुलना में कम प्रभावित होता है।
5. माध्य विचलन द्वारा ही वितरण के महत्व को स्पष्ट किया जा सकता है।
6. यह विचलन समस्त मूल्यों को उनकी सापेक्षिक महत्ता प्रदान करता है।
7. यह अपकिरण का एक निश्चित माप है तथा इसका मूल्य शुद्ध अंश तक निकाला जा सकता है।

माध्य विचलन के दोष (Demerits of MD):-

1. माध्य विचलन की गणना में बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा करने से इसे शुद्ध नहीं माना जाता।
2. कभी-कभी यह अविश्वसनीय परिणाम देता है।
3. अलग-अलग माध्यों से अलग-अलग विचलन प्राप्त होने के कारण इसमें समानता का अभाव पाया जाता है।

व्यावहारिक रूप में माध्य विचलन की अपेक्षा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) अधिक प्रचलित है।

4.12 प्रमाप विचलन (Standard Deviation):-

प्रमाप विचलन के विचार का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने 1893 ई0 में किया था। यह अपकिरण को मापने की सबसे अधिक लोकप्रिय और वैज्ञानिक रीति है। प्रमाप विचलन की गणना केवल समान्तर माध्य के प्रयोग से ही की जाती है। किसी समंक समूह का प्रमाप विचलन निकालने हेतु उस समूह के समान्तर माध्य से विभिन्न पद मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं। माध्य विचलन की भॉति विचलन लेते समय बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं। वर्गमूल से पूर्व जो मूल्य आता है, उसे अपकिरण की द्वितीय घात या विचरणांक अथवा प्रसरण (Variance) कहते हैं। अत: प्रमाप

विचलन समान्तर माध्य से समक श्रेणी के विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है। (Standard Deviation is the square root of the Arithmetic Mean of the squares of all deviations being measured from the Arithmetic mean of the observations).

प्रमाप विचलन का संकेताक्षर ग्रीक भाषा का छोटा अक्षर (Small Sigma)σ होता है। प्रमाप विचलन को मध्यक विभ्रम (Mean Error), मध्यक वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) या मूल मध्यक वर्ग विचलन (Root Mean Square Deviation) आदि अनेक नामों से भी सम्बोधित किया जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) दो श्रेणियों की तुलना के लिए प्रमाप विचलन का सापेक्ष माप (Relative Measure of Standard Deviation) ज्ञात किया जाता है जिसे प्रमाप विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation) कहते हैं। प्रमाप विचलन में समान्तर माध्य $(\overline{X})$ से भाग देने से प्रमाप विचलन का गुणांक प्राप्त हो जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणांक (Coefficient of S.D.) = $\frac{\sigma}{X} or \frac{S.D.}{Mean}$

प्रमाप विचलन की परिगणना (Calculation of Standard Deviation):-

i. खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन की गणना (Calculation of S.D. in Discrete Series)

a. प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

b. लघु रीति (Short-cut Method) = $\sigma \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$

उदाहरण 06:- निम्न समंकों से प्रमाप विचलन की परिगणना कीजिए।

अंक (X)	1	2	3	4	5	6	7	Total
बांरबारता (f)	1	5	11	15	13	4	1	50

हल:- प्रत्यक्ष विधि से प्रमाप विचलन की परिगणना

अंक X	**बांरबारता (f)**	**4 से विचलन D**	**विचलन का वर्ग d^2**	**विचलन का वर्ग व बारंबारता का गुणन fd^2**	**अंक व बारंबारता का गुणन fx**
1	1	-3	9	9	1
2	5	-2	4	20	10
3	11	-1	1	11	33

3	11	-1	1	11	33
4	15	0	0	0	60
5	13	1	1	13	65
6	4	2	4	16	24
7	1	3	9	9	7
Total	50		28	78	200

$X = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{200}{50} = 4$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$ or $\sqrt{\frac{78}{50}} = \sqrt{1.50} = 1.25$ अत: SD=1.25

लघु रीति (Short-cut Method) से प्रमाप विचलन की परिगणना :

X	F	dx(A=3)	fdx	fdx X dx (fdx^2)
1	1	-2	-2	4
2	5	-1	-5	5
3	11	0	0	0
4	15	+1	15	15
5	13	+2	26	52
6	4	+3	12	36
7	1	+4	4	16
Total	50		50	120

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{120}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2.56 - (1)^2}$$

$$= \sqrt{2.56 - 1}$$

$$= 1.25$$

सतत श्रेणी में (Continuous Series) में प्रमाप विचलन

(Continuous Series)

(A) प्रत्यक्ष रीति $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

(B) लघु रीति $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2 x}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$

उदाहरण 07:- निम्न समंकों से प्रमाप विचलन तथा उनके गुणांक की परिगणना कीजिए।

कुल अंकों में प्राप्तांक:- 0-2 2-4 4-6 6-8 8-10 Total

छात्रों की संख्या:- 2 5 15 7 1 30

Marks	No. of Students	M.V.	Deviation from $\overline{X}$ = S	Square of Deviations	Product of f x d^2	frequency X Value	Square of M.V.	Product of f and X^2
X	**f**	**X**	**d**	**d^2**	**fd^2**	**fX**	**X^2**	**fx^2**
0-2	2	1	-4	16	32	2	1	2
2-4	5	3	-2	4	20	15	9	45
4-6	15	5	0	0	0	75	25	375
6-8	7	7	2	4	28	49	49	343
8-10	1	9	4	16	16	9	81	81
Total	**30**	**-**	**-**	**40**	**96**	**150**	**165**	**846**

$$X = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{150}{30} = 5 Marks; \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{96}{30}} = 1.79$$

Coefficient of $\sigma = \frac{\sigma}{X} = \frac{1.79}{5} = or 0.36$

लघु रीति से प्रमाप विचलन का परिकलन

X	M.V. (X)	No. of f	Dx A=7	f d x	fdx Xdx	X^2	fX^2
0-2	1	2	-6	-12	72	1	2
2-4	3	5	-4	-20	80	9	45
4-6	5	15	-2	-30	60	25	375
6-8	7	7	0	0	0	49	343
8-10	9	1	2	2	4	81	81
Total	-	30	-10	-60	216	165	846

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdx}{N} = 7 + \frac{-60}{30} = 7 - 2 = 5$$ Marks

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2x}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{216}{30} - \left(\frac{-60}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7.20 - (-2)^2} = \sqrt{3.2} = 1.79$$ Marks

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation):- दो या दो से अधिक श्रेणियों में अपकिरण की मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है। विचरण-गुणांक ज्ञात करने हेतु प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तो विचरण गुणांक कहलाता है।

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation) = $\frac{\sigma}{\overline{X}} X 100$

विचरण गुणांक एक सापेक्ष माप है। इसका प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने 1895 में किया था। अत: इसे कार्ल पियर्सन का विचरण गुणांक भी कहते हैं। कार्ल पियर्सन के अनुसार "विचरण गुणांक माध्य में होने वाला प्रतिशत विचरण है, जबकि प्रमाप विचलन को माध्य में होने वाला सम्पूर्ण विचरण माना जाता है।" इसका प्रयोग दो समूहों की अस्थिरता (Variability), सजातीयता (Homogeneity), स्थिरता (Stability) तथा संगति (Consistency) की तुलना के लिए किया जाता है। जिस श्रेणी में विचरण गुणांक कम होता है वह श्रेणी उस श्रेणी से अधिक स्थिर (संगत) होती है, जिसमें विचरण गुणांक अधिक होता है।

प्रमाप विचलन की गणितीय विशेषताएँ (Mathematical Properties of Standard Deviation):-

1. एक से अधिक श्रेणियों के आधार पर विभिन्न प्रमाप विचलनों से सम्पूर्ण श्रेणियों का सामूहिक प्रमाप विचलन निकाला जा सकता है।
2. यदि दो श्रेणियों के मदों की संख्या व समान्तर माध्य समान हों तो सम्पूर्ण श्रेणी का प्रमाप विचलन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:- $\sigma_{12} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}}$
3. क्रमानुसार प्राकृतिक संख्याओं का प्रमाप विचलन ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है:- $\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}(N^2 - 1)}$
4. प्रमाप विचलन का सामान्य वक्र (Normal Crave) के क्षेत्रफल से एक विशिष्ट संबंध होता है।

$\overline{X} \pm \sigma =$ 68.26%

$\overline{X} \pm \sigma =$ 68.26%

$\overline{X} \pm 2\sigma =$ 95.44%

$\overline{X} \pm 3\sigma =$ 99.76%

प्रमाप विचलन के गुण (Merits of Standard Deviation):-

1. प्रमाप विचलन श्रेणी के समस्त पदों पर आधारित होता है।
2. प्रमाप विचलन की स्पष्ट एवं निश्चित माप है।
3. प्रमाप विचलन की गणना के लिए विचलनों के वर्ग बनाये जाते है फलस्वरूप सभी पद धनात्मक हो जाते हैं। अत: इसका अग्रिम विवेचन भी किया जा सकता है।
4. प्रमाप विचलन पर आकस्मिक परिवर्तनों का सबसे कम प्रमाप पड़ता है।
5. विभिन्न श्रेणियों के विचरणशीलता की तुलना करने, मापों की अर्थपूर्णता की जाँच करने, वितरण की सीमाएँ निर्धारित करने आदि में प्रमाप विचलन, अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ माप माना जाता है।
6. निर्वचन की सुविधा के कारण श्रेणी की आकृति को समझना सरल होता है।

प्रमाप विचलन के दोष (Demerits) :-

1. प्रमाप विचलन की परिगणना क्रिया अपेक्षाकृत कठिन व जटिल है।
2. प्रमाप विचलन पर चरम पदों का अधिक प्रभाव पड़ता है।

4.13 अपकिरण के विभिन्न मापों के मध्य संबंध (Relationship among different measures of Dispersion):-

यदि आवृति बंटन सममित अथवा कुछ असममित हो तो अपकिरण के विभिन्न मापों में संबंध निम्नवत पाया जाता है:-

1. Range = 4 to 6 times of $\sigma(S.D.)$
2. Q.D. = $\frac{2}{3}$ of $\sigma(S.D.)$ or $\sigma(S.D.) = \frac{3}{2}$ of Q.D.
3. Q.D. = $\frac{5}{6}$ of $\delta(M.D.) = \frac{6}{5}$ of Q.D.
4. δ (M.D.) = $\frac{4}{5}$ of $\sigma(S.D.)$ or $\sigma(S.D.) = \frac{5}{4}$ of δ (M.D.)
5. 6 $\sigma(S.D.)$ = 9 Q. D. = 7.5 δ (M.D.)
6. P.E. (Probable Error) = .6745 or $\frac{2}{3}$ of $\sigma(S.D.)$

4.14 मानक त्रुटि (Standard Error):-

न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस साँख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है। किसी भी न्यादर्श साँख्यिकी का प्रयोग उस जनसंख्या की विशेषता (Population parameter) को आँकलन करने में होता है। न्यादर्श माध्य (Sample Mean) वितरण के प्रमाप विचलन को 'माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Mean)' की संज्ञा दी जाती है। ठीक उसी तरह न्यादर्श अनुपात वितरण (Distribution

of Sample Proportions) के प्रमाप को उस 'अनुपात की मानक त्रुटि' (Standard Error of the Proportion) की संज्ञा दी जाती है। जैसा कि हम जानते है कि प्रमाप विचलन किसी भी एक न्यादर्श के माध्य से अंकों के फैलाव को दर्शाता है। जबकि मानक त्रुटि किसी भी समंक श्रेणी के माध्य से उस श्रेणी के अंकों के औसत विचरण या अपकिरण को दर्शाता है। किसी भी न्यादर्श वितरण के विभिन्न माध्यों के माध्य से विभिन्न मानों के औसत विचरण या अपकिरण को इंगित करता है।

दूसरे शब्दों में, प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त किसी साँख्यिकीय मान की शुद्धता तथा सार्थकता ज्ञात करने के लिए जिस सांख्किीय विधि का प्रयोग किया जाता है उसे उस साँख्यिकी की 'प्रामाणिक त्रुटि' (Standard Error) या SE कहते है। इस सूत्र द्वारा हम इन सीमाओं का पता सरलतापूर्वक लगा सकते है, जिनके अन्तर्गत वास्तविक साँख्यिकीय मान (मध्यमान, माध्यिका, बहुलक, चतुर्थांक विचलन, प्रमाप विचलन, सहसंबंध इत्यादि) होता है। बड़े प्रतिदर्श तथा छोटे प्रतिदर्श की प्रामाणिक त्रुटि ज्ञात करने के सूत्र अलग-अलग होते है।

प्रामाणिक त्रुटि को सरल शब्दों में इस प्रकार समझा जा सकता है। निदर्शन (प्रतिदर्श) बंटन (Sampling distribution) के प्रमाप विचलन को प्रामाणिक त्रुटि (Standard Error) कहते हैं। अत: समान्तर माध्य के निदर्शन बंटन के प्रमाप विचलन (SD) को समान्तर माध्य का प्रामाणिक त्रुटि $(\sigma_{\bar{x}})$ कहेंगें। किसी भी प्रतिदर्शन का प्रमाप त्रुटि या प्रामाणिक त्रुटि (SE) उस प्रतिदर्शन के निदर्शन बंटन का प्रमाप विचलन होता है। प्रमाप विचलन के निदर्शन बंटन (Sampling distribution) का प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन अनुपातों का प्रमाप त्रुटि ($C_{P)}$ कहलाता है।

न्यादर्श (Sample) के संदर्भ में, मानक त्रुटि (Standard Error), न्यादर्श त्रुटि (Sampling Error) से गहरे रूप से संबंधित है। न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) एक आकलन है। इस आकलन की शुद्धता, संगतता और सर्वश्रेष्ठता के बारे में न्यादर्श त्रुटि की मात्रा से आकलित की जाती है। न्यादर्श में प्रमाप विचलन की मात्रा जितनी अधिक होती है, मानक त्रुटि की मात्रा उतनी ही बढ़ती जाती है। मानक त्रुटि और न्यादर्श त्रुटि के मध्य प्रत्यक्ष संबंध है। अत: किसी भी साँख्यिकी मान की शुद्धता सूचकांक ज्ञात करने से पहले उस साँख्यिकी की मानक त्रुटि की जानकारी होनी चाहिए ताकि न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) से समग्र साँख्यिकी (Population Parameter) का सही-सही आकंलन किया जा सके। वास्तव में मानक त्रुटि किसी भी साँख्यिकी के सार्थकता स्तर को प्रदर्शित करता है तथा साथ ही उसके वैधता व विश्वसनीयता के बारे में भी बतलाता है। यहाँ पर कुछ महत्वपूर्ण साँख्यिकीयों के मानक त्रुटि का सूत्र बतलाया जा रहा है ताकि उन साँख्यिकीय मानों का प्रयोग उच्च सार्थकता स्तर पर किया जा सके।

1. समान्तर माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Arithmetic Mean, SE_M)

a. जब न्यादर्श का आकार बड़ा हो $\sigma \overline{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ σ = S.D. of Population

n = Sample Size (न्यादर्श आकार)

$\sigma_{\overline{X}} = SE_M$

b. जब न्यादर्श का आकार 30 या उससे छोटा हो

$$S_M = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad \text{जहाँ} \qquad S = \frac{\sqrt{\Sigma x^2}}{N-1}$$

$N =$ न्यादर्श आकार

2. मध्यिका की मानक त्रुटि (Standard Error of Median)

$$\sigma_{Mdn} = \frac{1.253\sigma}{\sqrt{N}} \; or \; \sigma_{Mdn} = \frac{1.858Q}{\sqrt{N}}$$

σ = S.D.

Q = Quartile Deviation

3. प्रमाप विचलन की मानक त्रुटि (Standard Error of S.D.):-

समग्र का प्रमाप विचलन व न्यादर्श का प्रमाप विचलन के मध्य विचलन की मात्रा प्रमाप विचलन का मानक त्रुटि कहलाता है।

$$SE_\sigma = \sigma_\sigma = \frac{.716}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{ZN}}$$

(SE_σ का मान हमेशा SE_M के मान से कम होता है)

4. चतुर्थांक विचलन का मानक त्रुटि (Standard Error of Q.D.):-

$$\sigma_Q = \frac{.786\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{या} \quad \sigma_Q = \frac{1.17Q}{\sqrt{N}}$$

5. प्रतिशत की मानक त्रुटि (Standard Error of Percentage):-

$$\sigma\% = \frac{\sqrt{PQ}}{N}$$

P = किसी व्यवहार के घटित होने का प्रतिशत

Q = (1-P)

N = No. of cases

6. सहसंबंध गुणांक की मानक त्रुटि (Standard Error of the Coefficient of Correlation):-

$$\sigma_r = \frac{(1-r^2)}{\sqrt{N}}$$

विभिन्न प्रतिदर्शनों के प्रमाप त्रुटि के सूत्र (Formulae of Standard Error of Difference Statistics):

Statistic	Standard Error
1. Sample Mean $\overline{X}$	$\sigma / \sqrt{n}$ or $\sqrt{\sigma 2} / n = \sigma_{\overline{X}}$
2. Sample Proportion 'p'	$\sqrt{P(1-P)/n} = \sigma_P$
3. Sample Standard Deviation	$\sigma / \sqrt{2n}$ or $\sqrt{\sigma^2 / 2n} = \sigma_S$
4. S^2 Variance	$\sigma^2 \sqrt{2/n} = \sigma_V$
5. 'r' Sample Correlation Coefficient	$(1-P^2) / \sqrt{n} = \sigma_r$
6. Difference between two means $(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$	$\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}} = \sigma_{\overline{X}_1} - X_2$
7. Difference between two means when r is given	$\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2} - 2r\frac{s_1 s_2}{n_1 n_1}}$
8. Difference between two standard deviations $(S_1 - S_2)$	$\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{zn_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{zn_2}} = \sigma_{S_1} - s_2$
9. Difference between two proportions $(P_1 - P_2)$	$\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} = \sigma_{P_1} - p_2$
10. Difference between sample mean and combined mean	(i) $\sigma_{\overline{X}_1} - \overline{X}_{12} = \sqrt{\sigma^2 \frac{n_2}{n_1(n_1+n_2)}}$ (ii) $\sigma_{\overline{X}_2} - \overline{X}_{12} = \sqrt{\sigma^2 \frac{n_1}{n_2(n_1+n_2)}}$
11. Difference between sample proportion and combined proportion	$\sigma_{P_1} - P_o = \sqrt{P_O Q_o \frac{n_2}{n_1(n_1+n_2)}}$
12. Difference between sample standard deviation and combined standard deviation	(i) $\sigma_{S_1} - S_{12} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{z} \frac{n_2}{n_1(n_1+n_2)}}$ $\sigma_{S_2} - S_{12} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{} \frac{n_1}{}}$

	(ii) $\sqrt{\;} \; z \;\; n_2(n_1+n_2)$
13. Other Measures Median $\sigma m = 1.25331 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Quartile Deviation = $\sigma_{QD} = 0.78672 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Mean Deviation = $\sigma_{\delta} = 0.6028 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Variance $\sigma_s 2 = \sigma_z \frac{2}{\sqrt{n}}$ Coefficient of Skewness= $\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{2n}$ Coefficient of Correlation $\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{r}}$

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

a. ……………………..का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है।

b. किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को ……………… कहते हैं।

c. प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तो ……….कहलाता है।

d. न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस साँख्यिकी का ……………….कहा जाता है।

e. दो या दो से अधिक श्रेणियों में ……………..की मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

f. माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का…………….. होता है।

g. माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यिका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के …………..विचलन का माध्य है।

h. चतुर्थांक विचलन श्रेणी के ………………मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है।

i. चतुर्थांक विचलन श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थांक के अन्तर का ……..होता है।

j. शतमक विस्तार P_{90} व …………का अन्तर होता है।

k. शतमक विस्तार माप श्रेणी के ………. मूल्यों पर आधारित होता है।

l. …………अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है।

m. किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के अन्तर को ………….विस्तार कहते हैं।

n. मानक त्रुटि किसी भी साँख्यिकी के ……………… रूप को प्रदर्शित करता है।

n. मानक त्रुटि किसी भी सांख्यिकी के………….. स्तर को प्रदर्शित करता है।

o. प्रमाप विचलन के विचार का प्रतिपादन ……………..ने किया।

p. विचरण गुणांक एक …………………माप है।

q. विचरण गुणांक के विचार का प्रतिपादन ………….ने किया था।

r. ……………….समान्तर माध्य से समंक श्रेणी के विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है।

s. समान्तर माध्य से परिकलित माध्य विचलन को ………….घात का अपकिरण (Moment of Dispersion) भी कहते है।

t. (................) = $\frac{H - L}{H + L}$

4.15 सारांश

साँख्यिकीय विश्लेषण की शुद्धता के लिए विचरणशीलता के मापक को समझना अत्यंत आवश्यक है। प्रस्तुत इकाई में आप विचरणशीलता के मापकों, चतुर्थांक, शतांक तथा प्रमुख सांख्यिकियों के प्रमाप त्ऱुटियों का अध्ययन किया। इस भाग में इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपकिरण किसी श्रेणी के पद-मूल्यों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपकिरण कहते हैं।

अपकिरण को निम्न प्रकार से मापा जा सकता है:-

(i) **निरपेक्ष माप (Absolute Measures)** :- यह माप अपकिरण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।

(ii) **सापेक्ष माप (Relative Measures):-** सापेक्ष अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता हे। दो यो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

अपकिरण ज्ञात करन े की विभिन्न रीतियाँ हैं-

1. विस्तार (Range): किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं।
2. अन्तर-चतुर्थांक विस्तार (Inter-Quartile Range) किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थांक विस्तार कहते हैं। यह माप आंशिक रूप से विस्तार (Range) के समान ही है। इस माप के अन्तर्गत मध्य की 50% मदों के मूल्यों को ही ध्यान में रखा जाता है।
3. शतमक विस्तार (Percentile Range): यह आंशिक विस्तार का ही अन्य माप है। इसका उपयोग शैक्षणिक व मनोवैज्ञानिक मापों में अधिक होता है। शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है। अत: यदि मध्य का 80% मूल्य ज्ञात हो तो भी शतमक विस्तार ज्ञात किया जा सकता है।

80% मूल्य ज्ञात हो तो भी शतमक विस्तार ज्ञात किया जा सकता है।

4. चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation): चतुर्थांक विचलन श्रेणी के चतुर्थांक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थांक के अन्तर का आधा होता है। इसलिए इसे अर्द्ध अन्तर-चतुर्थांक विस्तार भी कहते है। यदि कोई श्रेणी नियमित अथवा सममितीय हो तो मध्यक (M) , तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के ठीक बीच होगा।
5. माध्य विचलन (Mean Deviation): माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। ये विचलन बहुलक, मध्यिका या समान्तर माध्य किसी भी एक माध्य से लिये जा सकते हैं। इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़कर दिया जाता है। इस प्रकार माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यिका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है। बीजगणितीय चिन्ह + और – पर स्थान न देकर सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है। इस प्रकार प्राप्त विचलनों को जोड़कर मदों की कुल संख्याओं से भाग देने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे माध्य विचलन कहते है। माध्य विचलन जितना अधिक होता है उस श्रेणी में अपकिरण या फैलाव उतना ही अधिक होता है।
6. प्रमाप विचलन (Standard Deviation): प्रमाप विचलन की गणना केवल समान्तर माध्य के प्रयोग से ही की जाती है। किसी समंक समूह का प्रमाप विचलन निकालने हेतु उस समूह के समान्तर माध्य से विभिन्न पद मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं। माध्य विचलन की भॉति विचलन लेते समय बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं।
7. न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस साँख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है। किसी भी न्यादर्श साँख्यिकी का प्रयोग उस जनसंख्या की विशेषता (Population parameter) को आँकलन करने में होता है। न्यादर्श माध्य (Sample Mean) वितरण के प्रमाप विचलन को 'माध्य की मानक त्रुटि (Standard Error of Mean)' की संज्ञा दी जाती है। ठीक उसी तरह न्यादर्श अनुपात वितरण (Distribution of Sample Proportions) के प्रमाप को उस 'अनुपात की मानक त्रुटि' (Standard Error of the Proportion) की संज्ञा दी जाती है।

4.16 शब्दावली

विचरणशीलता (Dispersion): विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ फैलाव, विखराव या प्रसार है। अपकिरण किसी श्रेणी के पद-मूल्यों के विखराव या विचरण की सीमा बताता है। जिस सीमा तक व्यक्तिगत पद मूल्यों में भिन्नता होती है, उसके माप को अपकिरण कहते हैं।

निरपेक्ष अपकिरण (Absolute Dispersion) : यह माप अपकिरण को बतलाता है और उसी इकाई में बताया जाता है, जिसमें मूल समंक व्यक्त किए गए हैं। निरपेक्ष माप दो श्रेणियों की तुलना करने हेतु प्रयोग नहीं किया जा सकता।

सापेक्ष माप (Relative Dispersion):- सापेक्ष अपकिरण कुल अपकिरण का किसी प्रमाप मूल्य से विभाजन करने से प्राप्त होता है और अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता हे। दो यो दो से अधिक श्रेणियों की तुलना करने हेतु सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

विस्तार (Range): किसी समंक श्रेणी में सबसे अधिक मूल्य (H) और सबसे छोटे मूल्य या न्यूनतम मूल्य (L) के अन्तर को विस्तार कहते हैं।

अन्तर-चतुर्थांक विस्तार (Inter-Quartile Range): किसी भी श्रेणी के तृतीय चतुर्थांक (Q_3) तथा प्रथम चतुर्थांक (Q_1) के अन्तर को अन्तर चतुर्थांक विस्तार कहते हैं।

शतमक विस्तार (Percentile Range): शतमक विस्तार P_{90} व P_{10} का अन्तर होता है। यह माप श्रेणी के 80% मूल्यों पर आधारित होता है।

चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation): चतुर्थांक विचलन श्रेणी के चतुर्थांक मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है। यह श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थांक के अन्तर का आधा होता है।

माध्य विचलन (Mean Deviation): माध्य विचलन श्रेणी के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है। इसमें बीजगणितीय चिन्हों क ो छोड़कर दिया जाता है। माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी भी माप (समान्तर माध्य, मध्यिका या बहुलक आदि) से श्रेणी के विभिन्न पदों के निरपेक्ष विचलन का माध्य है।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation): किसी समंक सम ूह का प्रमाप विचलन उस समूह के समान्तर म ाध्य से विभिन्न पद मूल्यों का विचलन होता है। इन विचलनों के वर्ग ज्ञात कर लिए जाते हैं। प्राप्त वर्गों के योग में कुल मदों की संख्या का भाग देकर वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है उसे प्रमाप विचलन कहते हैं।

मानक त्रुटि (Standard Error): न्यादर्श साँख्यिकी (Sample Statistics) के मानक विचलन (Standard Deviation) को उस साँख्यिकी का मानक त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है।

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation): विचरण-गुणांक ज्ञात करने हेतु प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर देते हैं तो विचरण गुणांक कहलाता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों में अपकिरण की मात्रा की तुलना करने के लिए विचरण-गुणांक का प्रयोग किया जाता है।

4.17 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. अपकिरण 2. विस्तार 3. विचरण गुणांक 4. अपकिरण 5. मानक त्रुटि (Standard Error) 6. माध्य 7. निरपेक्ष 8. चतुर्थांक 9. आधा 10. P_{10} 11. 80% 12. सापेक्ष 13. अन्तर चतुर्थांक 14. सार्थकता 15. कार्ल पियर्सन 16. सापेक्ष 17. कार्ल पियर्सन 18. प्रमाप विचलन 19. प्रथम विस्तार गुणांक

4.18 संदर्भ ग्रन्थ सूची/पाठ्य सामग्री (References/ Useful Readings):

1. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
2. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
4. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.
5. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
6. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
7. शर्मा, आर०ए० (2001) :शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ,

आर०लाल० पब्लिकेशन्स

4.19 निबंधात्मक प्रश्न

1. विचरणशीलता अथवा अपकिरण का अर्थ स्पष्ट कीजिए तथा विचरणशीलता के महत्व का वर्णन कीजिए।

2. विचरणशीलता के विभिन्न मापकों की तुलना कीजिए।

3. प्रमाप त्रुटि का अर्थ स्पष्ट कीजिए तथा इसके महत्व का वर्णन कीजिए।

4. निम्न समंकों के आधार पर चतुर्थांक विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए। From the following data find Quartile Deviation and its Coefficient. (उत्तर Q_1=4.13, Q_3= 7.11, Q.D.= 1.49, गुणांक=0.27)

अंक (X)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बारंबारता (f)	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

5. निम्न समंकों से माध्य विचलन की परिगणना कीजिए। (उत्तर 12.19)

अंक (X)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता (f)	10	12	25	35	45	50

6.निम्न समंकों से प्रमाप विचलन तथा उसका गुणक की परिगणना कीजिए। (उत्तर: प्रमाप विचलन= 13.91 गुणक=0.57)

अंक (X)	0	10	20	30	40
बारंबारता (f)	80	60	50	35	10

इकाई 5: सहसंबंध के मापक: पियर्सन प्रोडक्ट मोमेंट सहसंबंध गुणांक, द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक व बिंदु-द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक (Measures of Correlation - Pearson's Product Moment Coefficient of Correlation, Bi-serial and Point Bi-serial Coefficients of Correlation)

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

5.2 उद्देश्य

5.3 सहसंबंध का अर्थ व परिभाषाएं

5.4 सहसंबंध व कारण-कार्य संबंध

5.5 सहसंबंध का महत्व
5.6 सहसंबंध के प्रकार
5.7 सहसंबंध का परिमाण
5.8 सहसंबंध के रूप में r की विश्वसनीयता
5.9 सरल सहसंबंध ज्ञात करने की विधियाँ
5.10 कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक
5.11 कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना
5.12 वर्गीकृत श्रेणी में सहसबंध गुणांक
5.13 द्विपंक्तिक सहसंबंध
5.14 बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध
5.15 द्विपंक्तिक सहसंबंध व बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध के मध्य तुलना
5.16 सारांश
5.17 शब्दावली
5.18 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर
5.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
5.20 निबंधात्मक प्रश्न

5.1 प्रस्तावना:

मानव जीवन से संबंधित सामाजिक शैक्षिक, मनोवैज्ञानिक, आर्थिक, राजनैतिक एवं वैज्ञानिक आदि सभी क्षेत्रों में विभिन्न प्रकार की समंक श्रेणियों में आपस में किसी न किसी प्रकार संबंध पाया जाता है। उदाहरण के लिए- दुश्चिंता के बढ़ने से समायोजन में कमी, अधिगम बढ़ने से उपलब्धि में वृद्धि गरीबी बढ़ने से जीवन स्तर में कमी आदि। इन स्थितियों में साँख्यिकीय विश्लेषण के लिए सहसंबंध ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि सहसंबंध दो अथवा अधिक चरों के मध्य संबंध का अध्ययन करता है एवं उस संबंध की मात्रा को मापता है। यहाँ पर आप सहसंबंध का अर्थ, परिभाषा, प्रकृति व इसके मापने के विभिन्न प्रकारों का अध्ययन करेंगें।

5.2 उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- सहसंबंध का अर्थ बता पायेंगे।
- सहसंबंध के विभिन्न प्रकारों को स्पष्ट कर सकेंगे।
- सहसंबंध के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।
- सहसंबंध के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।
- सहसंबंध गुणांक का अर्थापन कर सकेंगे।
- कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना कर सकेंगे।
- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का परिकलन कर सकेंगे।

- बिंदु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक की गणना कर सकेंगे।

5.3 सहसंबंध (Correlation) का अर्थ व परिभाषाएं :

जब दो या अधिक तथ्यों के मध्य संबंध को अंकों में व्यक्त किया जाय तो उसे मापने एवं सूक्ष्म रूप में व्यक्त करने के लिए जो रीति प्रयोग में लायी जाती है उसे साँख्यिकी में सहसंबंध कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, दो या दो से अधिक चरों के मध्य अन्तर्संबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है। सहसंबंध के परिमाप को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है। विभिन्न विद्वानों ने सहसंबंध की अनेक परिभाषाएँ दी हैं-

प्रो0 किंग "यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य (Variables) सदैव एक ही दिशा में या परस्पर विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थिति में यह समझा जाना चाहिए कि उनमें एक निश्चित संबंध है। इसी संबंध को सहसंबंध कहते हैं। (If it is proved true that in a large number of instances, two variables tend always to fluctuate in the same or in opposite direction, we consider that the fact is established and relationship exists. This relationship is called correlation)."

बाउले- " जब दो संख्याएँ इस प्रकार सम्बन्धित हों कि एक का परिवर्तन दूसरे के परिवर्तन की सहानुभूति में हो, जिसमें एक की कमी या वृद्धि, दूसरे की कमी या वृद्धि से संबंधित हो या विपरीत हो और एक में परिवर्तन की मात्रा दूसरे के परिवर्तन की मात्रा के समान हो, तो दोनों मात्राएँ सहसंबंध कहलाती है।" इस प्रकार सहसंबंध दो या दो से अधिक संबंधित चरों के बीच संबंध की सीमा के माप को कहते हैं।

5.4 सहसंबंध व कारण-कार्य संबंध (Causation and Correlation):

जब दो समंक श्रेणियाँ एक दूसरे पर निर्भर/आश्रित हों तो इस पर निर्भरता को सहसंबंध के नाम से जाना जाता है। अत: एक समंक श्रेणी में परिवर्तन कारण होता है तथा इसके परिणामस्वरूप दूसरी श्रेणी में होने वाला परिवर्तन प्रभाव या कार्य कहलाता है। कारण एक स्वतंत्र चर होता है तथा प्रभाव इस पर आश्रित है। कारणों में परिवर्तनों से प्रभाव परिवर्तित होता है न कि प्रभाव के परिवर्तन से कारण। सहसंबंध की गणना से पूर्व चरों की प्रकृति को अच्छी तरह समझना चाहिए अन्यथा गणितीय विधि से चरों के मध्य सहसंबंध की निकाली गयी मात्रा बहुत ही भ्रामक हो सकता है। गणितीय विधि से किसी भी दो या दो से अधिक चरों के मध्य सहसंबंध की मात्रा का परिकलन किया जा सकता है और इन चरों के मध्य कुछ न कुछ सहसंबंध की मात्रा भी हो सकती है, लेकिन इसका अर्थ यह कदापि नहीं लगाना चाहिए कि उन चरों के मध्य कारण- कार्य का संबंध विद्यमान है। प्रत्येक कारण-कार्य संबंध का अर्थ सहसंबंध होता है, लेकिन प्रत्येक सहसंबंध से कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए यदि अभिप्रेरणा की मात्रा में परिवर्तन के फलस्वरूप अधिगम पर पड़ने वाले प्रभाव के बीच सहसंबंध गुणांक का परिकलन किया जाता है तो निश्चित रूप से उस सहसंबंध गुणांक के आधार पर यह कहा जा सकता है कि इन दोनों चरों के मध्य कारण-कार्य संबंध है। लेकिन यदि भारत में पुस्तकों के मूल्यों में परिवर्तन का न्यूयार्क में सोने के मूल्यों में परिवर्तन के समंकों से सहसंबंध गुणांक का परिकलन किया जाय तो इस गुणांक से प्राप्त परिणाम तर्कसंगत नहीं हो सकते, क्योंकि पुस्तकों के मूल्य व सोने के मूल्यों के मध्य कोई कारण-कार्य का संबंध सुनिश्चित नहीं किया किया जा सकता।

अत: इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक सहसंबंध गुणांक कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं करता।

5.5 सहसंबंध का महत्व (Importance of Correlation):

सहसंबंध का व्यावहारिक विज्ञान व भौतिक विज्ञान विषयों में बहुत महत्व है। इसे निम्न तरीके से समझा जा सकता है:-

- सहसंबंध के आधार पर दो संबंधित चर-मूल्यों में संबंध की जानकारी प्राप्त होती है।
- सहसंबंध विश्लेषण शोध कार्यों में सहायता प्रदान करता है।
- सहसंबंध के सिद्धान्त पर विचरण अनुपात (Ratio of Variation) तथा प्रतीपगमन (Regression) की धारणाएँ आधारित है, जिसकी सहायता से दूसरी श्रेणी के संभावित चर-मूल्यों का विश्वसनीय अनुमान लगाया जा सकता है।
- सहसंबंध का प्रभाव भविष्यवाणी की अनश्चितता के विस्तार को कम करता है।
- व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में दो या अधिक घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने एवं उनमें पारस्परिक संबंध का विवेचन करके पूर्वानुमान लगाने में सहसंबंध बहुत उपयोगी सिद्ध होता है।

5.6 सहसंबंध के प्रकार (Types of Correlation) :

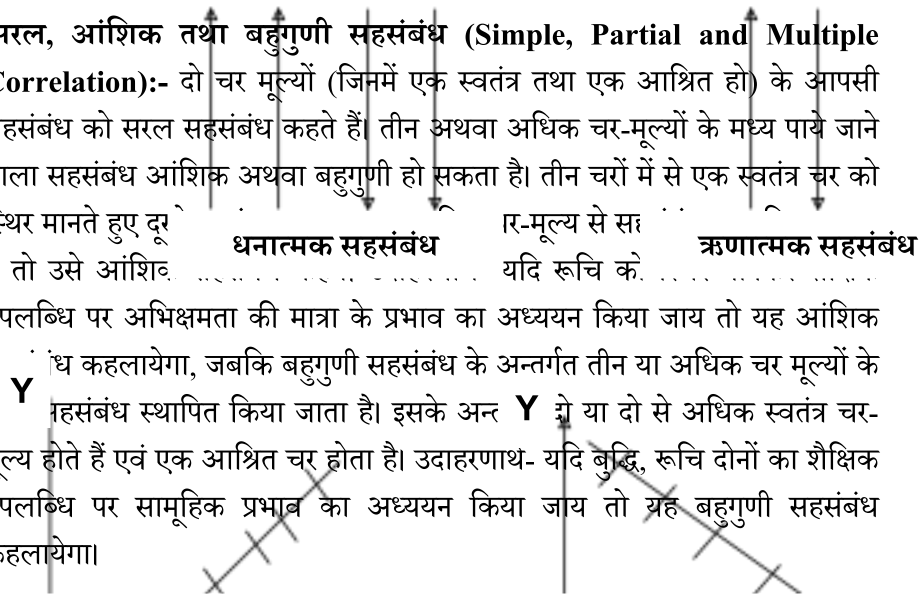
सहसंबंध को हम दिशा, अनुपात, तथा चर-मूल्यों की संख्या के आधार पर कई भागों में विभक्त कर सकते हैं।

i. **धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध (Positive and Negative Correlation) :-** यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहेंगें। जैसे- अधिगम की मात्रा में वृद्धि से शैक्षिक उपलब्धि का बढ़ना। इसके विपरीत यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाएगा। इसके अन्तर्गत एक चर-मूल्य में वृद्धि तथा दूसरे चर-मूल्य में कमी होती है तथा एक के मूल्य घटने से दूसरे के मूल्य बढ़ने लगते हैं। धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध को निम्न रेखाचित्र की मदद से समझा जा सकता है:-

अग्रांकित रेखाचित्र में पूर्ण धनात्मक तथा पूर्ण ऋणात्मक सह संबंध को प्रदर्शित किया गया है।

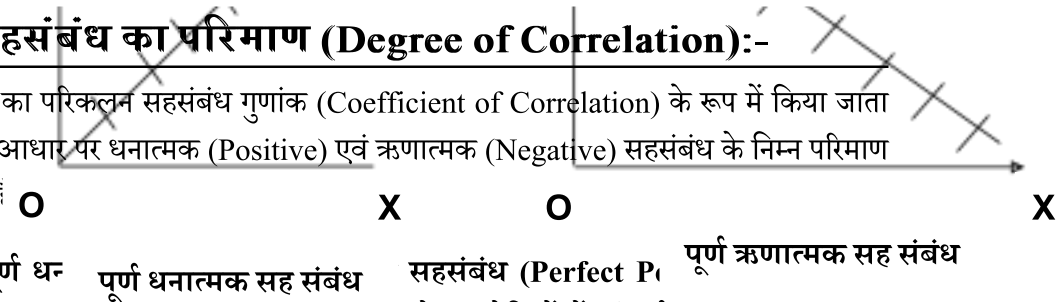
ii. **रेखीय तथा अ-रेखीय सहसंबंध (Linear or Non-Linear Correlation):-** परिवर्तन अनुपात की सममितता के आधार पर सहसंबंध रेखीय अथवा अ-रेखीय हो सकता है। रेखीय सहसंबंध में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि इन चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होगी जैसे- यदि छात्रावास से छात्रों की संख्या को दुगुनी कर दी जाय फलस्वरूप यदि खाद्यान्न की मात्रा भी दुगुनी दर से खपत हो तो इसे रेखीय सहसंबंध (Linear Correlation) कहेंगें। इसके विपरीत जब परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहेंगें। जैसे- छात्रों की संख्या दुगुनी होने पर खाद्यान्नों की मात्रा का दुगुनी दर से खपत नहीं होना उससे अधिक या कम मात्रा में खपत होना, अर्थात् दोनों चरों के परिवर्तन के अनुपात में स्थायित्व का अभाव हो, ऐसी स्थिति को यदि बिन्दु रेखीय पथ पर प्रदर्शित किया जाय तो यह रेखा, वक्र के रूप में बनेगी। रेखीय व अरेखीय सहसंबंधों को निम्न रेखाचित्रों के माध्यम से भलीभॉति समझा जा सकता है:-

iii. **सरल, आंशिक तथा बहुगुणी सहसंबंध (Simple, Partial and Multiple Correlation):-** दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं। तीन अथवा अधिक चर-मूल्यों के मध्य पाये जाने वाला सहसंबंध आंशिक अथवा बहुगुणी हो सकता है। तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दू[illegible] ार-मूल्य से स[illegible] है तो उसे आंशिव [illegible] यदि रूचि के [illegible] उपलब्धि पर अभिक्षमता की मात्रा के प्रभाव का अध्ययन किया जाय तो यह आंशिक स[illegible]ंध कहलायेगा, जबकि बहुगुणी सहसंबंध के अन्तर्गत तीन या अधिक चर मूल्यों के म[illegible]हसंबंध स्थापित किया जाता है। इसके अन्[illegible] दो या दो से अधिक स्वतंत्र चर-मूल्य होते हैं एवं एक आश्रित चर होता है। उदाहरणाथ- यदि बुद्धि, रूचि दोनों का शैक्षिक उपलब्धि पर सामूहिक प्रभाव का अध्ययन किया जाय तो यह बहुगुणी सहसंबंध कहलायेगा।



5.7 सहसंबंध का परिमाण (Degree of Correlation):-

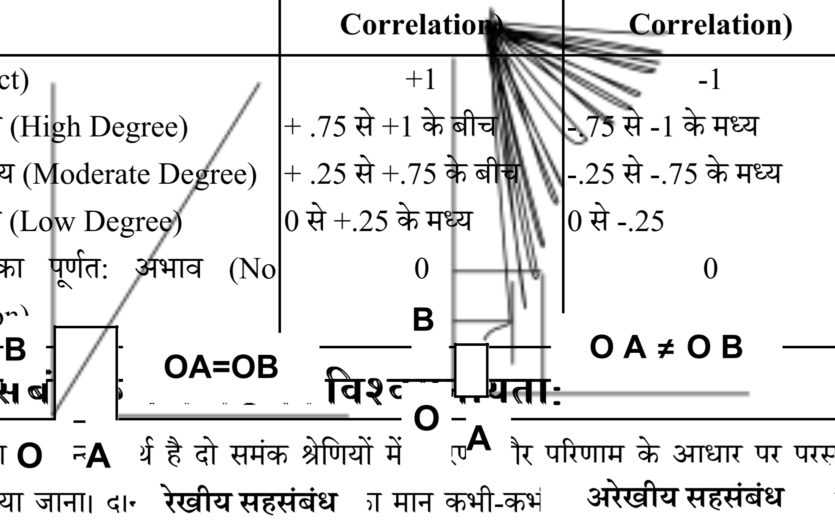
सहसंबंध का परिकलन सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) के रूप में किया जाता है। इसके आधार पर धनात्मक (Positive) एवं ऋणात्मक (Negative) सहसंबंध के निम्न परिमाण हो सकते हैं



i. **पूर्ण धन... सहसंबंध (Perfect P... Negative Correlation):-** जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहेंगें। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होगा। इसके विपरीत जब दो मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगें। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (-1) होगा। सहसंबंध गुणांक का मूल्य हर दशा में 0 तथा ±1 के मध्य होता है।

सहसंबंध गुणांक का मान व इसका अर्थापन

सहसंबंध परिमाण (Degree of Correlation)	धनात्मक सहसंबंध (Positive Correlation)	ऋणात्मक सहसंबंध (Negative Correlation)
पूर्ण (Perfect)	+1	-1
उच्च स्तरीय (High Degree)	+ .75 से +1 के बीच	-.75 से -1 के मध्य
मध्यम स्तरीय (Moderate Degree)	+ .25 से +.75 के बीच	-.25 से -.75 के मध्य
निम्न स्तरीय (Low Degree)	0 से +.25 के मध्य	0 से -.25
सहसंबंध का पूर्णत: अभाव (No Correlation)	0	0



5.8 सहसंबं... विश्ले...यता:

सहसंबंध का ...र्थ है दो समंक श्रेणियों में ... और परिणाम के आधार पर परस्पर सहसंबंध पाया जाना। दा... ...ा मान कभी-कभ... है। सहसंबंध गुणांक के कम होने पर यह नहीं मान लेना चाहिए कि संबंध बिल्कुल नहीं है तथा इसके विपरीत सहसंबंध गुणांक का मान अधिक होने पर भी यह नहीं मान लेना चाहिए कि उन चरों के मध्य घनिष्ठ संबंध है। छोटे आकार के प्रतिदर्श में सहसंबंध केवल अवसर त्रुटि के कारण ही हो सकता है। अत: जहाँ तक संभव हो सके दोनों चरों में कारण व प्रभाव संबंध को ज्ञात किया जाय ताकि उसके सबंधों की पृष्ठभूमि की जानकारी प्राप्त हो जाय।

5.9 सरल सहसंबंध ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of Determining Simple Correlation):-

i. बिन्दु रेखीय विधियाँ (Graphic Methods):-
   - i. विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)
   - ii. साधारण बिन्दु रेखीय रीति (Simple graphic Method)

ii. गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-

i. कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Correlation)

ii. स्पीयरमैन की श्रेणी अंतर विधि (Spearman's Rank Difference Method)

iii. संगामी विचलन गुणांक (Coefficient of Concurrent Deviations)

iiii. न्यूनतम वर्ग रीति (Least Squares Method)

v. अन्य रीतियाँ (Other Methods)

i. **बिन्दुरेखीय विधियाँ (Graphic Methods) :-**

विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) : दो समंकों के मध्य यह जानने के लिए कि वे एक दूसरे के संबंध में किस प्रकार गतिमान होते हैं, विक्षेप चित्र बनाये जाते हैं। इसमें दो चर जहाँ प्रथम स्वतंत्र चर जिसे भुजाक्ष (X-axis) पर तथा द्वितीय आश्रित चर जिसे कोटि-अक्ष Y पर प्रदर्शित कर X एवं Y श्रेणी के संबंधित दोनों मूल्यों के लिए एक ही बिन्दु अंकित किया जाता है। एक श्रेणी में जितने पद-युग्म (Pair-Values) होते हैं

(पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध) -1 े जाते हैं। विक्षेप चित्र को निम्न प्रकार सम ए **(पूर्ण धनात्मक सहसंबंध)**

0

सहसंबंध की मात्रा

ii. **साधारण बिन्दु रेखीय विधि:-** यह बहुत ही सरल विधि है। इसके अन्तर्गत श्रेणियों (X एवं Y) को खड़ी रेखा पर तथा संख्या समय अथवा स्थान को पड़ी रेखा पर अंकित कर दोनों श्रेणियों में संबंध को आसानी से देखा जा सकता है।

ii. **गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-** गणितीय विधि के अन्तर्गत हम यहाँ कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation) का अध्ययन करेंगें।

5.10 कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक:

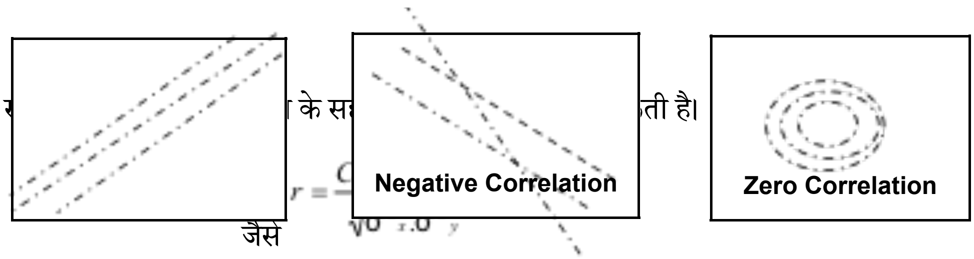
सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने कि लिए यह विधि सर्वश्रेष्ठ समझी जाती है। इस विधि में सहसंबंध की दिशा तथा संख्यात्मक मात्रा का माप भी किया जाता है। यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं**

प्रमाप विचलन पर आधारित है। अत: इसमें गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता पायी जाती है। इस रीति का प्रयोग सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन ने 1890 में जीवशास्त्र की समस्याओं के अध्ययन में किया था। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है। इस विधि की मुख्य विशेषताएँ निम्नवत हैं :-

1. इस विधि से सहसंबंध की दिशा का पता चलता है कि वह धनात्मक (+) है या ऋणात्मक (-)।
2. इस विधि के सहसंबंध गुणांक से मात्रा व सीमाओं (-1 से 0 से +1) का ज्ञान सरलता से हो जाता है।
3. इसमें श्रेणी के समस्त पदों को महत्व दिये जाने के कारण इसे सह-विचरण (Covariance) का एक अच्छा मापक माना जाता है।

सूत्रानुसार (Covariance) = $\frac{\Sigma xy}{N}$ $\quad x = X - \overline{X}$, $y = Y - \overline{Y}$

4. सहसंबंध गणांक चरों के मध्य सापेक्ष संबंध की माप हैं अत: इसमें इकाई नहीं होती।
5.

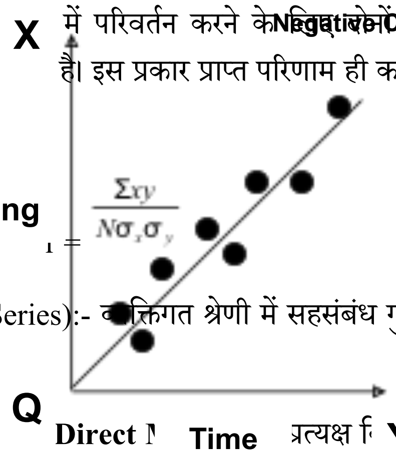


6. ... के स... ...ती है।

$r = \frac{C...}{\sigma_x . \sigma_y}$ जैसे

5.11 कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना:

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सह-विचरण (Covariance) ज्ञात करते हैं। इसे सहसंबंध गु... में परिवर्तन करने के... ...के प्रमाप विच...ों के गुणनफल से भाग दे दिया ... है। इस प्रकार प्राप्त परिणाम ही कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक कहलाता है।



सूत्रानुसार:- r = $\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$

व्यक्तिगत (Individual Series):- व्यक्तिगत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं:-

i. **प्रत्यक्ष वि... Direct ...** प्रत्यक्ष ... से सहसंबंध गुणांक निम्न सूत्रों में से किसी एक के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है:-

प्रथम सूत्र :- r = $\frac{Co\ variance}{\sigma_x . \sigma_y}$

द्वितीय सूत्र:- $\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}$ तृतीय सूत्र:- r = $\frac{\Sigma xy}{...}$

$$N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}.\frac{\Sigma y^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र:- $$\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

r = सहसंबंध गुणांक

Σxy = दोनों श्रेणियों के माध्यों से विचलनों के गुणनफल का योग।

Σx^2 = X श्रेणी के माध्य से विचलन वर्गों का योग।

Σy^2 = Y श्रेणी के माध्य से विचलन वर्गों का योग।

σ_x = X श्रेणी का प्रमाप विचलन σ_y = Y श्रेणी का प्रमाप विचलन

N = पदों की संख्या

उपर्युक्त चारों ही सूत्र मूल रूप से एक ही हैं अतएव किसी भी सूत्र से सहसंबंध गुणांक की गणना करने पर परिणाम एक ही होगा।

उदाहरण:- अग्र समंकों के आधार पर प्रत्यक्ष रीति द्वारा कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

X	10	20	30	40	50	60	70
Y	5	4	2	10	20	25	04

हल:- Calculation of the Coefficient of Correlation

X	**$\overline{X}=40$ से विचलन = x**	**विचलन का वर्ग x^2**	**Y**	**$\overline{Y}=10$ से विचलन =y**	**y^2**	**xXy**
10	-30	900	05	-5	25	150
20	-20	400	04	-6	36	120
30	-10	100	02	-8	64	80
40	0	0	10	0	0	0
50	10	100	20	10	100	100
60	20	400	25	15	225	300
70	30	900	04	-06	36	-180
$\Sigma X=280$ $N=7$		$\Sigma x^2=2800$	$\Sigma Y=70$ $N=7$		$\Sigma y^2=616$	$\Sigma xy=570$

$X=\frac{\Sigma X}{}=\frac{280}{}=40$ $\qquad$ $\overline{y}=\frac{\Sigma Y}{}=\frac{70}{}=10$

N 7 N 7

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} = \sqrt{\frac{2800}{7}} = \sqrt{400} = 20$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} = \sqrt{\frac{616}{7}} = 9.38$$

प्रथम सूत्र के अनुसार:- $r = \frac{Co\,variance}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\Sigma xy / N}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{570 | 7}{20 x 9.38} = \frac{81.42}{187.6} = 0.434$

निष्कर्ष:- X तथा Y चरों में मध्यम स्तरीय धनात्मक सहसंबंध है।

ii. **सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की लघु रीति (short-cut method of calculating Coefficient of Correlation):-** इस विधि में किसी भी पूर्णांक मूल्य को कल्पित माध्य मानकर उससे प्रदत्त मूल्यों के विचलन ($X- A_x = dx$ तथा $Y - A_y) = dy$) ज्ञात कर लेने चाहिए। तत्पश्चात् इन विचलनों के वर्ग (d^2x तथा d^2y) ज्ञात कर लेते हैं। अन्त में दोनों श्रेणियों के विचलनों का गुणनफल $d_x\ d_y$ ज्ञात कर लेते हैं। इन सभी मूल्यों का योग ज्ञात करने के पश्चात् निम्न मूल्य ज्ञात हो जाते हैं :- N, Σ dx, Σ dy, $\Sigma\ d^2x$, $\Sigma\ d^2y$, तथा Σ dx dy

इनके आधार पर अग्रलिखित में किसी एक सूत्र का प्रयोग करके सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

प्रथम सूत्र :-

$$r = \frac{\Sigma dxdy - N(\overline{X} - A_x)(\overline{Y} - A_y)}{N\sigma_x \sigma_y}$$

Σ dx dy = कल्पित माध्यों से लिए गए विचलनों के गुणनफलों का योग

द्वितीय सूत्र:-

$$\frac{\Sigma dxdy - N \left[\frac{\Sigma dx}{N}\right] \left[\frac{\Sigma dy}{N}\right]}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2x}{N} - \left[\frac{\Sigma dx}{N}\right]^2 X \frac{\Sigma d^2y}{N} - \left[\frac{\Sigma dy}{N}\right]^2}}$$

तृतीय सूत्र:-

$$= \frac{\Sigma dxdy.N - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{\Sigma d^2x.N - (\Sigma dx)^2}\ X \sqrt{\Sigma d^2y.N - (\Sigma dy)^2}}$$

चतुर्थ सूत्र:-

$$r = \frac{\Sigma dxdy - \left(\frac{\Sigma dx \Sigma dy}{N}\right)}{\sqrt{\Sigma d^2x - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma d^2y - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}}$$

टिप्पणी:- उपर्युक्त चारों सूत्र एक ही सूत्र के विभिन्न रूप हैं। इनमें से किसी के भी प्रयोग द्वारा सह-संबंध गुणांक का उत्तर एक ही आता है। लेकिन सुविधा की दृष्टि से आपको तृतीय सूत्र का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण:- निम्न समंकों से सहसंबंध गुणांक का परिकलन कीजिए।

X	10	20	30	40	50	60	70
Y	2	4	8	5	10	15	14

हल:- सहसंबंध गुणांक का परिकलन (Calculation of the Coefficient of Correlation)

X	A=40 से विचलन (X-A)=dx	d^2_x	Y	A=5 से विचलन (X-5)=dy	d^2_y	dx dy
10	-30	900	2	-3	9	90
20	-20	400	4	-1	1	20
30	-10	100	8	3	9	-30
40	0	0	5	0	0	0
50	10	100	10	5	25	50
60	20	400	15	10	100	200
70	30	900	14	9	81	270
N=7	$\sum$dx=0	$\sum d^2x$= 2800	N=7	$\sum$dy=23	$\sum d^2y$= 325	$\sum$dxdy=600

$$r = \frac{\Sigma dxdy.N - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{\Sigma d^2x.N - (\Sigma dx)^2}\sqrt{\Sigma d^2y.N - (\Sigma dy)^2}}$$

$$= \frac{600X7 - 0X23}{2800X7 - (0)^2}\sqrt{325X7 - (23)^2} = \frac{4200}{\sqrt{19600}X\sqrt{325x7 - (23)^2}}$$

$$= \frac{4200}{140x41.785} = \frac{4200}{5849.923} = 0.717$$

अत: दोनों चरों में उच्च मध्य स्तरीय सहसंबंध है।

मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव (Effect of Change in origin and scale):-

किसी श्रेणी के मूल बिन्दु में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी मूल्यों में एक निश्चित संख्या, स्थिरांक को घटाना तथा जोड़ना। इसी प्रकार किसी श्रेणी के पैमाने में परिवर्तन का अर्थ है उस श्रेणी के सभी मूल्यों में एक निश्चित संख्या का भाग देना अथवा गुणा करना। वास्तव में सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। दूसरे शब्दों में, यह मूल बिन्दु तथा पैमाने के प्रति स्वतंत्र है।

5.12 वर्गीकृत श्रेणी में सहसबंध गुणांक (Coefficient of Correlation in Grouped Series):

वर्गीकृत श्रेणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जा सकता है, लेकिन इसके लिए द्विचर सारणी का होना आवश्यक है। इसके अन्तर्गत दो परस्पर आवृत्ति बंटनों की कोष्ठक आवृत्तियों तथा कुल आवृत्तियों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है कि दोनों का अन्तर्संबंध स्पष्ट हो सके। वर्गीकृत सारणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए अन्य प्रक्रिया अपनायी जाती है:-

i. सतत् श्रेणी की स्थिति में X एवं Y श्रेणी के मध्य बिन्दु ज्ञात कर किसी भी कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात किए जाते हैं। वर्गान्तर समान होने पर दोनों श्रेणियों में अथवा किसी भी एक श्रेणी में पद-विचलन लिए जा सकते हैं।

ii. विचलनों तथा आवृत्तियों का गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात कर लेते हैं, जोकि Σfdx तथा Σfdy होंगे।

iii. fdx को dx से तथा fdy को dy से गुणा करके Σfd^2x तथा Σfd^2y ज्ञात करते हैं।

iiii. fdx dy को ज्ञात करने हेतु प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति तथा dx और dy को आपस में गुणा करेंगे। $\Sigma fdxdy$ का योग दोनों ही तरफ समान होता है।

सूत्र में प्रयुक्त $\Sigma fdxdy$ की गणना निम्न प्रकार की जानी चाहिए:-

i. कोष्ठ आवृत्ति को तालिका में छोटे खाने के नीचे दायीं ओर दिखाएँ।

ii. प्रत्येक कोष्ठ आवृत्ति से संबंधित 'dx' तथा 'dy' का गुणा करके कोष आवृत्ति वाले खाने के मध्य में स्थिर करें।

iii. इस प्रकार dxdy का गुणा संबंधित कोष्ठ आवृत्ति से करके छोटे खाने में ऊपर बांयी ओर गहरे अक्षरों में अंकित करें। ऐसा इसलिये किया जाता है, जिससे कि fdxdy का योग करते समय त्रुटि न हो।

iiii. सभी वर्गों के समक्ष fdxdy का योग करें।

v. इस प्रकार fdxdy का पुन: योग करने पर अभीष्ट $\Sigma fdxdy$ ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण:- एक बुद्धि परीक्षण में 67 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के समूह तथा आवृत्ति निम्नलिखित तालिका में दिये गये हैं। आयु तथा बुद्धि में संबंध के स्तर का माप कीजिए।

परीक्षण प्राप्तांक	**उम्र (Age) in years**				**Total**
200-250	4	4	2	1	11
250-300	3	5	4	2	14
300-350	2	6	8	5	21
350-400	1	4	6	10	21
Total	**10**	**19**	**20**	**18**	**67**

हल:- सहसंबंध गुणांक का परिकलन (Calculation of Coefficient of Correlation)

Age in years (X)			18	19	20	21	F	fdy	fd^2y	fdxdy
Test marks	Mid Value (Y)	dx dy	-1	0	+1	+2				
200-250	225	-1	4 1 4	0 0 4	-2 -1 2	-2 -2 1	11	-11	11	0
250-300	275	0	0 0 3	0 0 5	0 0 4	0 0 2	14	0	0	0
300-350	325	+1	-2 -1 2	0 0 6	8 1 8	10 2 5	21	21	21	16
350-400	375	+2	-2 -2 1	0 0 4	12 2 6	40 4 10	21	42	84	50
	Total f		10	19	20	18	N=67	$\Sigma fdy =$ 52	Σfd^2y =116	$\Sigma fdxdy$
	fdx		-10	0	20	36	$\Sigma fdx =$ 46			
	fd^2x		10	0	20	72	Σfd^2x =102			
	fdxdy		0	6	18	48	$\Sigma fdxdy$ = 66			

$$r = \frac{\Sigma fdxfdy.N - (\Sigma fdx)(\Sigma fdy)}{\Sigma fd^2x.N - (\Sigma fdx)^2 X \sqrt{\Sigma fd^2y.N - (\Sigma fdy)^2}} =$$

$$= \frac{66x67 - 46x52}{\sqrt{102x67 - (46)2\sqrt{116x67 - (57)^2}}}$$

$$r = \frac{2030}{\sqrt{4718x5068}}$$

$$= \frac{2030}{4889.87} r = 0 + .0415$$

अत: आयु तथा बुद्धि में मध्यम स्तरीय धनात्मक सहसंबंध है।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। इस विभ्रम के दो मुख्य कार्य होते हैं:-

सीमा निर्धारण:- PE के आधार पर 'r' की दो सीमाएँ निर्धारित की जाती है, जिनके अन्तर्गत पूरे समग्र पर आधारित सहसंबंध गुणांक पाये जाने की 50 प्रतिशत संभावना रहती है। PE का सूत्र निम्न

प्रकार है PE= 0.6745 $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

प्रमाप विभ्रम (Standard Error):- वर्तमान साँख्यिकी में PE के आधार पर SE का प्रयोग अच्छा माना जाता है। सहसंबंध का SE सदैव से PE अधिक उपयुक्त समझा जाता है।

SE of r = $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):- निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है।

Coefficient of determination (r^2) $= \frac{Explained\,Variation}{Total\,Variation}$

निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है। यदि r = 0.07 हो तो इसका निश्चयन गुणांक $(r)^2$ =0.43 होगा। इसका तात्पर्य है कि आश्रित चर (Y चर) में होने वाले केवल मात्र 49 प्रतिशत परिवर्तन ही X के कारण हैं, जबकि (100-49) = 51 प्रतिशत परिणाम अस्पष्ट है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :- अस्पष्टीकृत विचरणों को कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है।

Coefficient of Non-determination $K^2 = \frac{\text{Unexplained Variation}}{\text{Total Variation}}$

अथवा $K^2 = 1-r^2$

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

---

1. यदि r = 0.06 हो तो इसका निश्चयन गुणांक……………….. होगा।
2. ………………..का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है।
3. कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर …………….. ज्ञात किया जा सकता है।
4. ……………= $1-r^2$
5. SE of …………= $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$
6. सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु …………………का प्रयोग किया जाता है।
7. तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित

चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे ……………सहसंबंध कहते हैं।

8. जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे …………………………सहसंबंध कहते हैं।

9. यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ……………………कहलाता है।

10. जब दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को …………………..सहसंबंध कहते हैं।

5.13 द्विपंक्तिक सहसंबंध (Bi-serial Correlation):

शिक्षा या मनोविज्ञान के क्षेत्र में, दो सहसंबंध चर अखण्डित या सतत् (Continuous) रूप से मापनीय होते हैं। अर्थात् दो अखण्डित चरों के मध्य सहसंबंध का परिकलन किया जाता है। लेकिन इस स्थिति के अलावा एक ऐसी स्थिति भी होती है जहाँ दो सहसंबंध चरों में से एक चर अखण्डित रूप से मापनीय होता है व दूसरा चर कृत्रिम रूप से द्विखण्डित किया जाता है। इस स्थिति में जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भा्गों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को परिकलित करने के लिए हम द्विपंक्तिक सहसंबंध की विधि अपनाते हैं।

चरों का द्विविभाजन (Dichotomize) का अर्थ है उसे दो भागों में बाँटना या दो वर्गों में वर्गीकृत करना। इस तरह का विभाजन इस बात पर निर्भर करता है कि संग्रहित आँकड़ों की प्रकृति क्या है। उदाहरण के लिए यदि हमें यह अध्ययन करना है कि एक कक्षा में पास या फेल छात्रों की संख्या क्या है। इस अध्ययन के लिए सर्वप्रथम हमें पास या फेल की कसौटी निर्धारित करनी होती है। तत्पश्चात् उस कसौटी से प्रत्येक छात्र के शैक्षिक उपलब्धि की तुलना की जाती है तो यह पता चलता है कि कितने छात्र पास या फेल हैं। यहाँ पास या फेल, शैक्षिक उपलब्धि चर का कृत्रिम द्विविभाजन (Dichotomize) है। यह द्विभाजन प्राकृतिक नहीं है। शिक्षा या मनोविज्ञान के क्षेत्र में चरों का कृत्रिम द्विविभाजन अपनी सुविधा की दृष्टि से किया जाता है ताकि उन चरों को उपयुक्त साँख्यिकीय उपचारों द्वारा सही अर्थ दिया जा सके।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा चरों के कृत्रिम द्विविभाजन के अर्थ को समझा जा सकता है:-

1. उत्तीर्ण और अनुत्तीर्ण
2. समायोजित और कुसमायोजित
3. एथलेटिक और नॉन-एथलेटिक
4. गरीब और अमीर
5. नैतिक और अनैतिक
6. सुन्दर और कुरूप
7. सफल और असफल
8. सामाजिक और असामाजिक
9. प्रगतिवादी और रूढ़िवादी

उपर्युक्त उदाहरण में 'उत्तीर्ण और अनुत्तीर्ण' के रूप में परीक्षाफल रूपी चरों का द्विविभाजन पूर्ण रूप से कृत्रिम है। उत्तीर्ण या अनुत्तीर्ण निर्धारित करने की कसौटी पूर्ण रूप से परीक्षक अपने विवेक के आधार पर तय करता है। अत: यह कृत्रिम द्विविभाजन का उदाहरण है। इसी

तरह अन्य उदाहरण भी कृत्रिम आधार पर ही द्विविभाजित हैं।

आपने उपर्युक्त अनुच्छेद में चरों का कृत्रिम द्विविभाजन का अध्ययन किया है। कृत्रिम द्विविभाजन के अलावा चरों को प्राकृतिक कसौटी के आधार पर भी बाँटा जा सकता है। जैसे लिंग के आधार पर स्त्री व पुरूष का विभाजन, जीवित या मरा हुआ, पसन्द या नापसन्द, अपराधी या गैर-अपराधी, पी0एच0डी0 उपाधि धारक या गैर-पी0एच0डी0 उपाधि धारक इत्यादि।

अत: सतत् चर (Continuous Variable) और द्विविभाजन चर (a variable reduced to dichotomy) के मध्य जब उपयुक्त सहसंबंध गुणांक की प्रविधि का निर्धारण करना हो तो हमें सर्वप्रथम यह देख लेना चाहिए कि चरों के द्विविभाजन कृत्रिम या प्राकृतिक रूप से किया गया है। जब एक सतत् चर व तथा दूसरा कृत्रिम रूप से द्विभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकाला जाता है, तो हम द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक प्रविधि का प्रयोग करते हैं। इसके विपरीत एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकालने के लिए हम बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point Biserial Correlation) प्रविधि का प्रयोग करते हैं।

शैक्षिक उपलब्धि व परीक्षाफल के मध्य सहसंबंध द्विपंक्तिक सहसंबंध का उदाहरण है।

किसी पद पर प्राप्तांक व उत्तर की प्रकृति (Right/Wrong) के मध्य सहसंबंध, बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point biserial Correlation) का उदाहरण है।

द्विपंक्तिक सहसंबंध की मान्यतायें (Assumptions of Biserial Correlation):-

i. द्विभाजित चर में सततता (Continuity in the dichotomize

ii. द्विभाजित चरों के वितरण में प्रसामान्यता (Normality underlying the dichotomy)

iii. N का आकार बड़ा होना चाहिए (Large N)

iiii. मध्यिका (.50) के मध्य चर का द्विविभाजन (a split that i closer to .50 the better)

द्विविभाजन: चरों को दो भागों में बाँटना

कृत्रिम द्विविभाजन: जब चरों को वर्गीकृत करने का आधार पूर्ण रूप से आत्मनिष्ठ या अप्राकृतिक हो

सीमाऐं:-

i. द्विपंक्तिक सहसंबंध को प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) करने में प्रयोग नहीं

किया जा सकता।

ii. इससे प्रमाप त्रुटि का आकलन नहीं किया जा सकता।

iii. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की सीमा (± 1.00) की तरह यह गुणांक ± 1.00 के मध्य सीमित नहीं होता।

5.14 बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध की मान्यताएँ (Assumptions of Point Biserial Correlation):

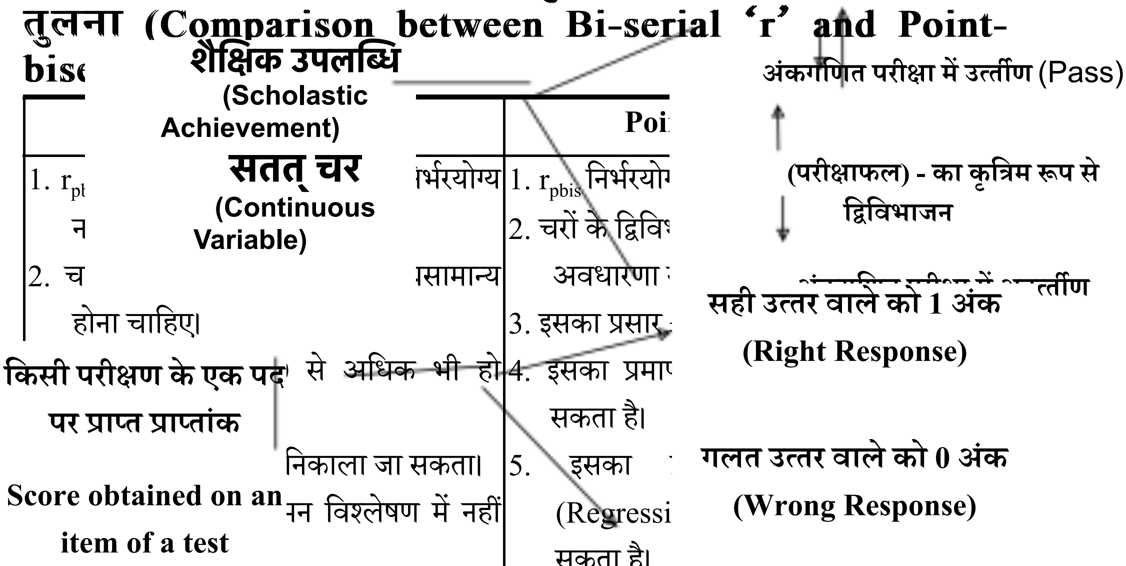
i. द्विविभाजित चर में असततता (Discontinuity in the dichotomized trait)

ii. द्विविभाजित चर के वितरण में अप्रसामान्यता (Lack of normality in the distribution underlying the dichotomy)

iii. चरों का विभाजन का आधार प्राकृतिक होना चाहिए (Natural or genuine dichotomy of variable)

iiii. N का आकार बड़ा होना चाहिए।

5.15 द्विपंक्तिक सहसंबंध व बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध के मध्य तुलना (Comparison between Bi-serial 'r' and Point-bis[...]



[...]	Poi[...]
1. r_{pt}[...] [...]र्भरयोग्य न[...]	1. r_{pbis} निर्भरयो[...]
2. च[...] [...]सामान्य होना चाहिए।	2. चरों के द्विवि[...] अवधारणा [...]
[...] से अधिक भी हो[...]	3. इसका प्रसार [...]
[...] निकाला जा सकता।	4. इसका प्रमा[...] सकता है।
[...]न विश्लेषण में नहीं	5. इसका [...] (Regressi[...] सकता है।
6. r_{bis} का मान r_{pbis} के मान से हमेशा अधिक होता है।	6. r_{pbis} का मान [...] है।
7. r_{bis} के मान को 'r' के मान से प्रतिजाँच नहीं किया जा सकता।	7. r_{pbis} के मान को 'r' के मान से प्रतिजाँच (Cross Check) किया जा सकता।
8. इसका प्रयोग Item analysis में नहीं किया जा सकता।	8. इसका प्रयोग प्राय: किसी परीक्षण के प्रमाणीकरण में पद-विश्लेषण (Item analysis) के रूप में किया जाता है।
9. r_{bis}, 'r' से भिन्न है।	9. r_{bis}, 'r' का ही एक रूप है।

द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक परिकलन का सूत्र (Formula to calculate the coefficient of Biserial Correlation):-

$$r_{bis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma t} \times \frac{pq}{u}$$

(biserial Coefficient of Correlation or biserial r)

Mp = उच्च वर्ग (उत्तीर्ण) का माध्य (Mean)

Mq = निम्न वर्ग (अनुत्तीर्ण) का माध्य (Mean)

σ t = सम्पूर्ण वर्ग का प्रमाप विचलन (S.D.)

p = उच्च वर्ग का कुल वर्ग के साथ अनुपात (Proportion)

q = निम्न वर्ग का कुल वर्ग के साथ अनुपात (Proportion), (q=1-P)

u = p और q के विभाजन बिन्दु पर प्रसामान्य वक्र की ऊँचाई

द्विपंक्तिक सहसंबंध (r_{bis}) परिकलन का वैकल्पिक सूत्र:

$$r_{bis} = \frac{M_p - MT}{\sigma} x \frac{P}{u}$$

M_T = कुल वर्ग का माध्य

r_{bis} को प्रमाप त्रुटि (Standard Error) परिकलन का सूत्र:

$$\frac{\frac{\sqrt{pq}}{u} - r^2{}_{bis}}{\sqrt{N}}$$

जब P और q का मान बहुत छोटा न हो, और N बहुत बड़ा हो।

बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (r_{pbis}) परिकलन का सूत्र (Formula to Calculate Coefficient of Point -biserial Correlation):

$$r_{pbis} = \frac{M_p - M_q}{\sigma} x \sqrt{pq}$$

M_p और M_q = दो वर्गों का क्रमश: माध्य

P = प्रथम वर्ग का अनुपात q = द्वितीय वर्ग का अनुपात

σ = कुल वर्ग का प्रमाप विचलन

r_{pbis} के प्रमाप त्रुटि परिकलन का सूत्र:

$$\sigma_{r_{pbis}} = \frac{(1 - r^2{}_{pbis})}{\sqrt{N}}$$

उदाहरण:- निम्न तालिका में दो समूहों के छात्रों द्वारा (क्रमश: उत्तीर्ण व अनुत्तीर्ण) गणित विषय के उपलब्धि प्राप्तांक का, वितरण दिखाया गया है। निम्न प्राप्तांक से द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Biserial Correlation) की गणना कीजिए।

गणित उपलब्धि परीक्षण का प्राप्तांक	**गणित उपलब्धि परीक्षण का परीक्षाफल**	
	उत्तीर्ण (f_p)	**अनुत्तीर्ण (f_q)**
5-10	0	5
10-15	3	5
15-20	10	13
20-25	15	26
25-30	24	40
30-35	35	15
35-40	10	6
40-45	16	0
45-50	7	0
Total	**120**	**110 230**

हलः- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का सूत्र :-

$$rbis = \frac{Mp - M_q}{\sigma} x \frac{pq}{u}$$

$rbis$ का परिकलन के लिये आपको निम्न पदों का अनुसरण करना चाहिए:

<u>प्रथम सोपानः-</u> p = उच्च वर्ग का अनुपात <u>उत्तीर्ण छात्रों की संख्या</u>

कुल छात्र

$$\frac{120}{120+110} = \frac{120}{230} = .52$$

<u>द्वितीय सोपानः-</u> q = 1 - p = 1-.52 = .48

<u>तृतीय सोपानः-</u> u = p और q के विभाजन बिन्दु पर प्रसामान्य वक्र की ऊँचाई

= .3989 (यह मान प्रसामान्य वक्र से संबंधित तालिका से लिया गया है)

<u>चतुर्थ सोपानः-</u>

$M_p = \frac{\Sigma x f_p}{\Sigma f_p} = \frac{3736}{120} = 31.13$

$M_q = \frac{\Sigma x f q}{\Sigma f q} = \frac{2725}{110} = 24.77$

$\sigma =$ कुल प्राप्तांक का प्रमाप विचलन = 8.41

<u>चतुर्थ सोपान:-</u>

सभी चरों का मान सूत्र में रखने पर

$$rbis = \frac{Mp - M_q}{\sigma_t} X \frac{pq}{u}$$

$$= \frac{31.13 - 24.77}{8.41} X \frac{.52 X .48}{0.3984}$$

$$= \frac{6.36}{8.41} X \frac{0.2496}{0.3984}$$

= 0.75624257 x 0.62650602

= 0.47

इस प्रकार, द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक का मान 0.47 हैं।

उदाहरण:- एक भाषा परीक्षण को 15 छात्रों पर प्रशासित किया गया। परीक्षण के पद नं0 10 तथा उस परीक्षण का कुल प्राप्तांक निम्न प्रकार से है (उत्तीर्ण के लिये 01 व अनुत्तीर्ण के लिये 0)। बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक से आप यह पता कीजिए कि उस परीक्षण का पद नं0 10, कुल परीक्षण से सहसंबंधित है अथवा नहीं।

छात्र	परीक्षण पर कुल प्राप्तांक	पद नं0 10 पर प्राप्तांक
1	25	1
2	23	1
3	18	0
4	24	0
5	23	1
6	20	0

7	19	0
8	22	1
9	21	1
10	23	1
11	21	0
12	20	0
13	21	1
14	21	1
15	22	1
कुल योग	**323**	**09**

उत्तीर्ण छात्रों की संख्या = 9

उत्तीर्ण छात्रों का अनुपात $(P) = \frac{9}{15} = .60$

अनुत्तीर्ण छात्रों की संख्या = 6

अनुत्तीर्ण छात्रों का अनुपात (9) = 1- .60 = .40

$$M_p = \frac{25+23+23+22+21+23+21+21+22}{9} = \frac{201}{9} = 22.33$$

$$Mq = \frac{18+24+20+19+21+20}{6} = \frac{122}{6} = 20.33$$

$\sigma_T = 1.82$ $$r_{pbis} = \frac{Mp - M_q}{\sigma} X \sqrt{pq} = \frac{22.33 - 20.33}{1.82} X \sqrt{.60 X .40}$$

= .54

इस बिन्दु द्विपंक्तिक सहसबंध गुणांक के मान से यह पता चलता है पद नं0 10 कुल परीक्षण से सार्थक रूप से सहसंबंधित है। यह पद एक अच्छा पद है जिसे परीक्षण में रखा जा सकता है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए:

11.…………………………..का प्रसार ±1.00 से अधिक भी हो सकता है।

1. चरों को दो स्वाभाविक भागों में बॉटने की प्रक्रिया को ....कहते हैं।
2. जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भा्गों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को हम ……………………………कहते हैं।
3. एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध को ……………………………..कहते हैं।
4. …………….सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है।

आधारित है।

5. r_{pbis} का मान r_{bis} के मान से हमेशा ………………होता है।

6. ……………………..का प्रयोग प्राय: किसी परीक्षण के प्रमाणीकरण में पद-विश्लेषण (Item analysis) के रूप में किया जाता है।

7. ……………………….सहसंबंध को प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) करने में प्रयोग नहीं किया जा सकता।

8. उत्तीर्ण और अनुत्तीर्ण ……………….विभाजन का उदाहरण है।

9. पुरुष और नारी .... विभाजन का उदाहरण है।

5.16 सारांश (Summary):

इस इकाई में आपने सहसंबंध का अर्थ, परिभाषा, प्रकृति व इसके मापने के कार्ल पियर्सन, द्विपंक्तिक तथा बिंदु- द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांकों का अध्ययन किया। इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण यहाँ दिया जा रहा है।

दो या दो से अधिक चरों के मध्य अन्तर्संबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है। सहसंबंध के परिमाप को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है।

गणितीय विधि से किसी भी दो या दो से अधिक चरों के मध्य सहसंबंध की मात्रा का परिकलन किया जा सकता है और इन चरों के मध्य कुछ न कुछ सहसंबंध की मात्रा भी हो सकती है, लेकिन इसका अर्थ यह कदापि नहीं लगाना चाहिए कि उन चरों के मध्य कारण- कार्य का संबंध विद्यमान है। प्रत्येक कारण-कार्य संबंध का अर्थ सहसंबंध होता है, लेकिन प्रत्येक सहसंबंध से कारण-कार्य संबंध को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता है।

सहसंबंध को हम दिशा, अनुपात, तथा चर-मूल्यों की संख्या के आधार पर कई भागों में विभक्त कर सकते हैं।

धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसंबंध (Positive and Negative Correlation) :- यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहेंगें। इसके विपरीत यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाएगा।

रेखीय तथा अ-रेखीय सहसंबंध (Linear or Non-Linear Correlation):- परिवर्तन अनुपात की सममितता के आधार पर सहसंबंध रेखीय अथवा अ-रेखीय हो सकता है। रेखीय सहसंबंध में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि इन चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होगी। इसके विपरीत जब परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहेंगें।

सरल, आंशिक तथा बहुगुणी सहसंबंध (Simple, Partial and Multiple Correlation):- दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं। तीन अथवा अधिक चर-मूल्यों के मध्य पाये जाने वाला सहसंबंध आंशिक अथवा बहुगुणी हो सकता है। तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे आंशिक सहसंबंध कहेंगें।

जबकि बहुगुणी सहसंबंध के अन्तर्गत तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसंबंध स्थापित किया जाता है।

पूर्ण धनात्मक अथवा पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Positive or Perfect Negative Correlation):- जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहेंगें। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होगा। इसके विपरीत जब दो मूल्यों में परिवर्तन समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगें। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (-1) होगा। सहसंबंध गुणांक का मूल्य हर दशा में 0 तथा ±1 के मध्य होता है।

सरल सहसंबंध ज्ञात करने की निम्न विधियाँ हैं -

- iii. बिन्दु रेखीय विधियाँ (Graphic Methods):-
  - iii. विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)
  - iiii. साधारण बिन्दु रेखीय रीति (Simple graphic Method)

- iiii. गणितीय विधियाँ (Mathematical Methods):-
  - vi. कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Karl Pearson Coefficient of Correlation)
  - vii. स्पीयरमैन की श्रेणी अंतर विधि (Spearman's Rank Difference Method)
  - viii. संगामी विचलन गुणांक (Coefficient of Concurrent Deviations)
  - ix. न्यूनतम वर्ग रीति (Least Squares Method)
  - x. अन्य रीतियाँ (Other Methods)

कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक: सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने कि लिए यह विधि सर्वश्रेष्ठ समझी जाती है। इस विधि में सहसंबंध की दिशा तथा संख्यात्मक मात्रा का माप भी किया जाता है। यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है। अत: इसमें गणितीय दृष्टि से पूर्ण शुद्धता पायी जाती है। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है।

वास्तव में सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। दूसरे शब्दों में, यह मूल बिन्दु तथा पैमाने के प्रति स्वतंत्र है।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विभ्रम (Standard Error):- वर्तमान साँख्यिकी में PE के आधार पर SE का प्रयोग अच्छा माना जाता है। सहसंबंध का SE सदैव से PE अधिक उपयुक्त समझा जाता है। SE of r =

$$\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):- निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है।निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :- अस्पष्टीकृत विचरणों को

कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। $K^2 = 1-r^2$

जहाँ दो सहसंबंध चरों में से एक चर अखण्डित रूप से मापनीय होता है व दूसरा चर कृत्रिम रूप से द्विखण्डित किया जाता है। इस स्थिति में जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भागों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को परिकलित करने के लिए हम द्विपंक्तिक सहसंबंध की विधि अपनाते हैं। इसके विपरीत एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध निकालने के लिए हम बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point Biserial Correlation) प्रविधि का प्रयोग करते हैं।

5.17 शब्दावली (Glossary)

सहसंबंध (Correlation): दो या दो से अधिक चरों के मध्य अर्न्तसंबंध को सहसंबंध की संज्ञा दी जाती है।

सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation): सहसंबंध के परिमाप को अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिसे सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) कहा जाता है।

धनात्मक सहसंबंध (Positive Correlation): यदि दो पद श्रेणियों या चरों में परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो उसे धनात्मक सहसंबंध कहते हैं ।

ऋणात्मक सहसंबंध (Negative Correlation): यदि एक चर के मूल्यों में एक दिशा में परिवर्तन होने से दूसरे चर के मूल्यों में विपरीत दिशा में परिवर्तन हो तो ऐसा सहसंबंध ऋणात्मक सहसंबंध कहलाता है ।

रेखीय सहसंबंध (Linear Correlation): रेखीय सहसंबंध के अन्तर्गत दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थायी रूप से समान होता है अर्थात् यदि चर-मूल्यों को बिन्दु-रेखीय पत्र पर अंकित किया जाय तो वह रेखा एक सीधी रेखा के रूप में होती है।

अ-रेखीय सहसंबंध (Non-Linear Correlation): जब दो चरों में परिवर्तन का अनुपात स्थिर नहीं होता तो ऐसे सहसंबंध को अरेखीय सहसंबंध कहते हैं ।

सरल सहसंबंध (Simple Correlation): दो चर मूल्यों (जिनमें एक स्वतंत्र तथा एक आश्रित हो) के आपसी सहसंबंध को सरल सहसंबंध कहते हैं।

आंशिक सहसंबंध (Partial Correlation): तीन चरों में से एक स्वतंत्र चर को स्थिर मानते हुए दूसरे स्वतंत्र चर मूल्य का आश्रित चर-मूल्य से सहसंबंध ज्ञात किया जाता है तो उसे आंशिक सहसंबंध कहते हैं।

बहुगुणी सहसंबंध (Multiple Correlation): तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य सहसंबंध को बहुगुणी सहसंबंध कहते हैं।

पूर्ण धनात्मक सहसंबंध (Perfect Positive Correlation): जब दो पद श्रेणियों में परिवर्तन समान अनुपात एवं एक ही दिशा में हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहते हैं। ऐसी स्थिति में सहसंबंध गुणांक (+1) होता है।

पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Negative Correlation): जब दो मूल्यों में परिवर्तन

समान अनुपात में ठीक विपरीत दिशा में हो तो उसे पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध कहेंगें। ऐसी स्थ‍िति में सहसंबंध गुणांक (-1) होता है।

कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक: यह सहसंबंध गुणांक **माध्य एवं प्रमाप विचलन** पर आधारित है। इस रीति के अन्तर्गत दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक (Coefficient Correlation) ज्ञात करते हैं, जिसे संकेताक्षर 'r' से संबोधित किया जाता है।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error) :- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु संभाव्य विभ्रम का प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विभ्रम (Standard Error): सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता जाँच करने हेतु प्रमाप विभ्रम का प्रयोग किया जाता है। SE of r = $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

निश्चयन गुणांक (Coefficient of determination):- निश्चयन गुणांक का तात्पर्य है, आश्रित चर में होने वाले परिवर्तनों के लिए स्वतंत्र चर कितना उत्तरदायी है। निश्चयन गुणांक का वर्गमूल ही सहसंबंध गुणांक है।

अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) :- अस्पष्टीकृत विचरणों को कुल विचरणों से भाग देने पर अनिश्चयन गुणांक की गणना की जा सकती है। कुल विचरण को 1 मानने पर 1 में से निश्चयन गुणांक को घटाने पर अनिश्चयन गुणांक ज्ञात किया जा सकता है। $K^2 = 1-r^2$

प्राकृतिक द्विविभाजन (Natural Dichotomy): चरों को दो स्वाभाविक भागों में बाँटना।

कृत्रिम द्विविभाजन (Artificial Dichotomy): जब चरों को वर्गीकृत करने का आधार पूर्ण रूप से आत्मनिष्ठ या अप्राकृतिक हो।

द्विपंक्तिक सहसंबंध (Biserial Correlation): जब एक चर अखण्डित (Continuous) हो व दूसरे चर को कृत्रिम रूप से दो भा्गों में विभाजित किया गया हो तो इनके मध्य सहसंबंध को हम द्विपंक्तिक सहसंबंध कहते हैं।

बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation): एक सतत् चर व प्राकृतिक रूप में द्विविभाजित चर के मध्य सहसंबंध को बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation) कहते हैं ।

5.18 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. $(r)^2 = 0.36$ 2. निश्चयन गुणांक 3. अनिश्चयन गुणांक 4. K^2 5. r 6. प्रमाप विभ्रम 7. आंशिक 8. पूर्ण धनात्मक 9. ऋणात्मक सहसंबंध 10. अरेखीय 11. द्विपंक्तिक सहसंबंध 12. प्राकृतिक द्विविभाजन 13. द्विपंक्तिक सहसंबंध 14. बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध (Point-biserial Correlation) 15. कार्ल पियर्सन 16. कम 17. बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध 18. द्विपंक्तिक 19. कृत्रिम द्विविभाजन 20. प्राकृतिक द्विविभाजन

5.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री (References/

Useful Readings)

1. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
2. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.
3. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
4. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
5. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
6. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स
7. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
8. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.

5.20 निबंधात्मक प्रश्न

1. सहसंबंध का अर्थ बताईये व इसके विभिन्न प्रकारों को स्पष्ट कीजिये।

2. सहसंबंध के विभिन्न मापकों का परिकलन कर सकेंगे।

3. सहसंबंध के विभिन्न मापकों की तुलना कर सकेंगे।

4. सहसंबंध गुणांक का अर्थापन कर सकेंगे।

5. निम्न आँकड़े से कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना कीजिये। (उत्तर: $r = 0.69$)

छात्र	प्रथम परीक्षण में प्राप्त अंक	द्वितीय परीक्षण में प्राप्त अंक
A	8	6
B	6	5
C	5	4
D	5	3
E	7	2
F	8	7
G	3	2
H	6	3

6. द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक व बिंदु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।

7. निम्न तालिका में दो समूहों के छात्रों द्वारा (क्रमशः दार्शनिक व गैर दार्शनिक) गणित विषय के उपलब्धि प्राप्तांक का, वितरण दिखाया गया है। निम्न प्राप्तांक से द्विपंक्तिक सहसंबंध

गुणांक (Coefficient of Biserial Correlation) की गणना कीजिए। (उत्तर =0.41)

गणित उपलब्धि परीक्षण का प्राप्तांक	**गणित उपलब्धि परीक्षण का परीक्षाफल**	
	दार्शनिक **(f_p)**	गैर दार्शनिक **(f_q)**
85-89	5	6
80-84	2	16
75-79	6	19
70-74	6	27
65-69	1	19
60-64	0	21
55-59	1	16
Total	**21**	124 **145**

8. एक परीक्षण को 11 छात्रों पर प्रशासित किया गया। परीक्षण के पद नं0 07 तथा उस

परीक्षण का कुल प्राप्तांक निम्न प्रकार से है (उत्तीर्ण के लिये 01 व अनुत्तीर्ण के लिये 0)। बिन्दु द्विपंक्तिक सहसंबंध गुणांक से आप यह पता कीजिए कि उस परीक्षण का पद नं0 07, कुल परीक्षण से सहसंबंधित है अथवा नहीं। (उत्तर =0.36)

छात्र	**परीक्षण पर कुल प्राप्तांक**	**पद नं0 07 पर प्राप्तांक**
1	15	1
2	14	1
3	13	0
4	15	0
5	10	1
6	15	0
7	13	0
8	12	1
9	15	1
10	10	1
11	11	0
कुल योग	**143**	**06**

|

|

इकाई 6: अंकों के वितरण की प्रकृति का अवबोध: सामान्य वितरण वक्र – इसकी विशेषताएँ व उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व (कुकुदता) के मानों का परिकलन (Understanding the nature of the distribution of scores: Normal Probability Curve (NPC) - Its characteristics and uses, Computation of the Values of Skewness and Kurtosis)

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

6.2 उद्देश्य

6.3 आवृत्ति वितरण के प्रकार

6.4 विषमता

6.5 विषमता गुणांक का परिकलन

6.6 पृथुशीर्षत्व या कुकुदता

6.7 पृथुशीर्षत्व का माप

6.8 प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण
6.9 प्रसामान्य वक्र
6.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
6.11 मानक प्रसामान्य वक्र
6.12 मानक प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
6.13 प्रसामान्य वक्र की उपयोगिताएँ या अनुप्रयोग
6.14 प्रसामान्य वक्र में प्रायिकता निर्धारित करना
6.15 सामान्य स ंभावना वक्र के उपयोग के उदाहरण
6.16 सारांश
6.17 शब्दावली
6.18 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर
6.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
6.20 निबंधात्मक प्रश्न

6.1 प्रस्तावना:

आकड़ों की विश्लेषण की क्रिया में एक शोधार्थी या छात्र को आँकड़े या समंक (Data) या अकों (Scores) की प्रकृति को जानना चाहिए। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency) हमें समंक श्रेणी के प्रतिनिधि मूल्यों का अनुमान प्रस्तुत करते हैं तथा विचरणशीलता के माप (Measures of Variability) केन्द्रीय मूल्य के विभिन्न पद मूल्यों के विखराव, फैलाव अथवा प्रसार को इंगित करते है। यद्यपि ये दोनों ही माप श्रेणी के विश्लेषण हेतु अत्यंत आवश्यक सूचनाएँ प्रस्तुत करते हैं, किन्तु इनमें यह ज्ञात नहीं हो पाता कि समंक श्रेणी का स्वरूप कैसा है अर्थात् केन्द्रीय प्रवृत्ति से मूल्यों का बिखराव या प्रसार सममितीय है अथवा सममितीय नहीं है। अत: श्रेणी या आँकड़ों के वास्तविक स्वरूप को जानने के लिए आँकड़ो के वितरण की प्रवृत्ति को समझना अत्यावश्यक है। इसके लिए आपको सामान्य वितरण वक्र इसकी विशेषताएँ और उपयोगिताएँ, समंक वितरण वक्र के प्रकार को विषमता व पृथुशीर्षत्व जैसे मानों के माध्यम से जानना अनिवार्य है ताकि आप अंकों के वितरण की प्रकृति को समझ सकें और इसका प्रयोग शोध निष्कर्ष निकालने में कर सकें। प्रस्तुत इकाई में आप सामान्य वितरण वक्र की विशेषताएँ और उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व के मान के परिकलन के बारे में अध्ययन करेंगे।

6.2 उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- सामान्य वितरण के अर्थ को स्पष्ट कर पायेंगे।
- सामान्य वितरण वक्र की विशेषताओं की व्याख्या कर सकेंगे।
- सामान्य वितरण वक्र की प्रकृति को बता पायेंगें।
- सामान्य वितरण वक्र की उपयोगिताओं की व्याख्या कर सकेंगे।
- सामान्य वितरण वक्र पर आधारित समस्याओं को हल कर सकेंगे।
- [illegible]

- विषमता गुणांक के मान का परिकलन कर सकेंगे।
- पृथुशीर्षत्व मापक का परिकलन कर सकेंगे।

6.3 आवृत्ति वितरण के प्रकार (Types of frequency distribution):

1. **सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution)**:- इस प्रकार के वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है। यदि आवृत्ति वितरण का वक्र तैयार किया जाय तो वह सदैव घण्टी के आकार (Bell Shaped) का होता है, जो इसकी सामान्य स्थिति को प्रदर्शित करता है। ऐसे वितरण में समान्तर माध्य, मध्यिका व बहुलक के मूल्य समान होते हैं तथा मध्यिका से दोनों चतुर्थकों (Quartiles) के मूल्यों में अन्तर भी समान होता है। इस प्रकार के वितरण में विषमता नहीं होती है। ऐसे वितरण को सामान्य वितरण (Normal Distribution), सामान्य वक्र (Normal Curve) या सामान्य विभ्रम वक्र (Normal Curve of Error) के नाम से भी जाना जाता है।

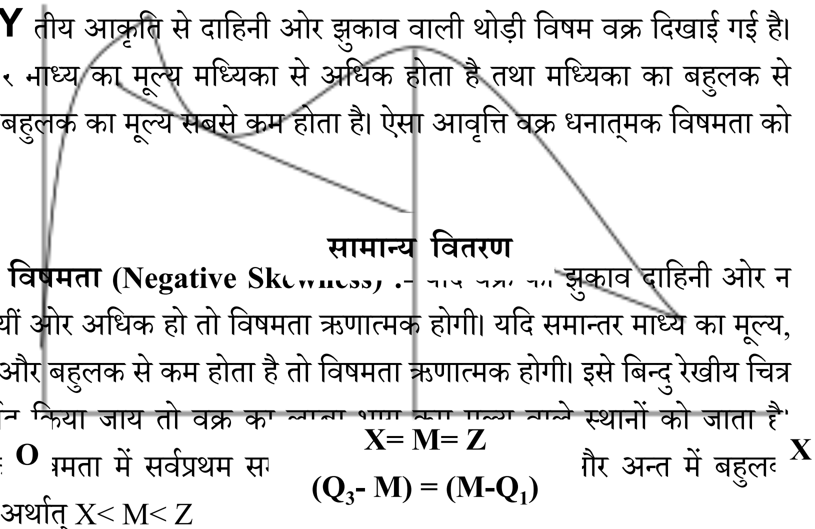
रेखाचित्र 01 एक आदर्श आवृत्ति वक्र को प्रस्तुत करता है, जिसमें बिल्कुल विषमता नहीं है। इसकी आवृत्ति घण्टी के आकार की होने के कारण इसे घण्टी के आकार (Bell Shaped) वाली वक्र कहते हैं। इस दशा में समान्तर माध्य, मध्यिका तथा बहुलक का मूल्य समान रहता है। यह सामान्य वक्र है।

2. **असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution)**:- असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है। आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती है अधिकतम बिन्दु पर पहुँचने के पश्चात उसी क्रम में नहीं घटती। ऐसे वितरण का वक्र घण्टी के आकार वाला व दायें या बायें झुकाव लिए हुए होता है। ऐसे वितरण में समान्तर माध्य, मध्यिका एवं बहुलक के मूल्य असमान होते हैं तथा चतुर्थकों के अन्तर भी असमान होते हैं तथा मध्यिका में दोनों चतुर्थकों के अन्तर भी असमान होते हैं। इस प्रकार के वितरण में विषमता की उपस्थिति होती है। असममित वितरण दो प्रकार की हो सकती है:-

i. धनात्मक विषमता (Positive Skewness) :- यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में धनात्मक विषमता होगी। धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य $(\bar{X})$ मध्यिका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है। यदि

माध्य का मूल्य $(\overline{X})$, मध्यिका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है। यदि धनात्मक विषमता वक्र को बिन्दुरेखीय चित्र पर प्रदर्शित किया जाय तो वक्र का लम्बा भाग अधिक चर वाले स्थानों को जाता है। धनात्मक विषमता वक्र में सर्वप्रथम, फिर मध्यिका और अन्त में समान्तर माध्य आता है अर्थात् $(\overline{X}) > M_d > Z$.

वास्तव में असममित बंटन वाला वक्र, केन्द्र से दाहिनी ओर को अधिक फैला हो सकता है या बायीं ओर को। तीय आकृति से दाहिनी ओर झुकाव वाली थोड़ी विषम वक्र दिखाई गई है। इस दशा में समान्तर माध्य का मूल्य मध्यिका से अधिक होता है तथा मध्यिका का बहुलक से अधिक। इस प्रकार बहुलक का मूल्य सबसे कम होता है। ऐसा आवृत्ति वक्र धनात्मक विषमता को प्रदर्शित करता है।



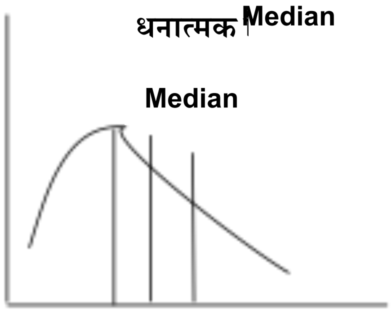
ii. ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) :- यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी। यदि समान्तर माध्य का मूल्य, मध्यिका और बहुलक से कम होता है तो विषमता ऋणात्मक होगी। इसे बिन्दु रेखीय चित्र पर प्रदर्शित किया जाय तो वक्र का लम्बा भाग कम मूल्य वाले स्थानों को जाता है। ऋणात्मक विषमता में सर्वप्रथम स... और अन्त में बहुलक आता है, अर्थात् X< M< Z

<u>**रेखाचित्र 01**</u>

रेखाचित्र 03 ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) को प्रदर्शित करता है। इस दशा में बहुलक का मूल्य सबसे अधिक होता है। ऐसा वक्र बायीं ओर विषमता को बताता है।

आवृत्ति वितरण के विभिन्न प्रकारों को अग्रांकित चित्र द्वारा सरलता से समझा जा सकता है:

सामान्य वितरण वक्र, धनात्मक विषमता वक्र, व ऋणात्मक विषमता वक्र के सापेक्षिक स्थिति को इन रेखाचित्रों के माध्यम से समझा जा सकता है।



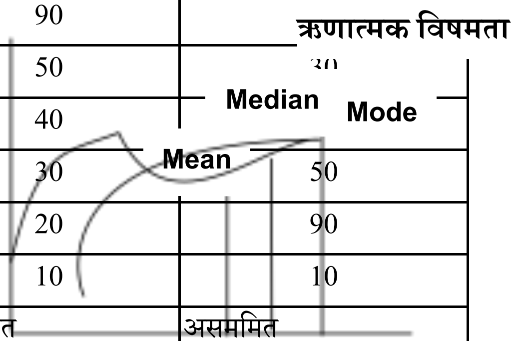
Mean > Median > Mode

रेखाचित्र 02

इस प्रकार आपने देखा कि विषमता धनात्मक अथवा ऋणात्मक दोनों ही प्रकार की हो सकती है। दूसरी बात यह है कि विषमता कम या अधिक हो सकती है। यदि वक्र कम फैला हुआ हो तो विषमता साधारणतया कम और वक्र के अधिक फैला होने की दशा में विषमता अधिक होती है। आवृत्ति वितरण के विभिन्न स्वरूपों में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की स्थिति को अग्रलिखित आँकड़ों के माध्यम से आप समझ सकते हैं-

आवृत्ति वितरण के विभिन्न स्वरूप:

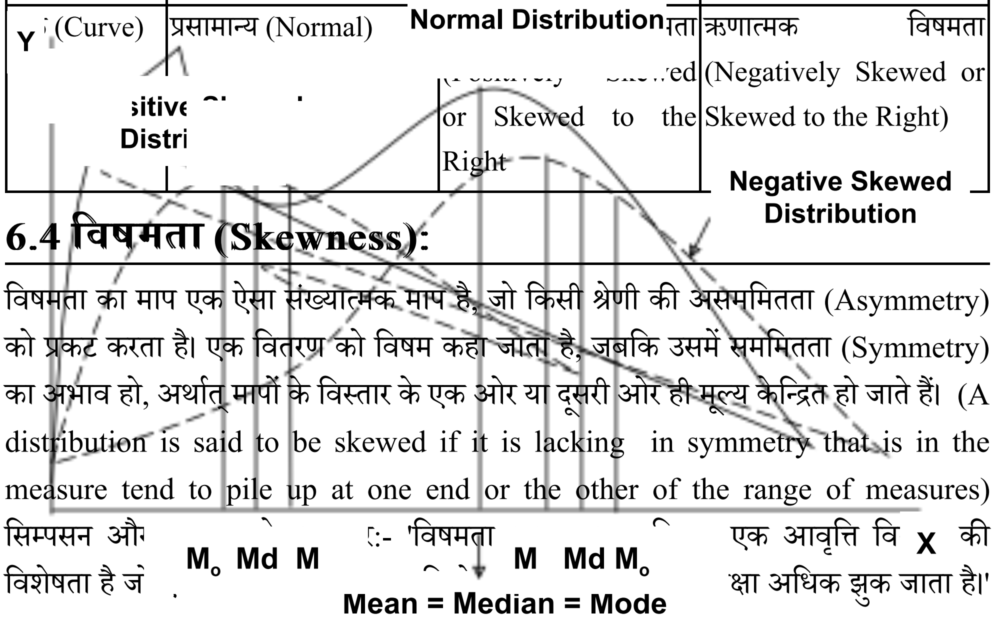
आकार (Size)	अ	ब	स
	आवृत्ति (Frequency)	आवृत्ति (f)	आवृत्ति (f)
5	10	10	10
10	30	90	[illegible]
15	50	50	30
20	70	40	[illegible]
25	50	30	50
30	30	20	90
35	10	10	10
विषमता	विषमता का अभाव (Symmetrical) सममित	असममित (Asymmet[illegible] धनात्मक विष[illegible] (Positively Skewe[illegible]	असममित [illegible] [illegible]मता [illegible]ed)
माध्यों की स्थिति Position of	Mean = Median= Mode	M > Md > Mo	M < Md < Mo



$(Q_1 - M) > (M - Q_1)$

रेखाचित्र 03

Position of Average			
चतुर्थांक Quartiles	$Q_3 - M_d = M_d - Q_1$	$(Q_3 - M_d) > (M_d - Q_1)$	$Q_3 - Md < Md - Q_1$
(Curve)	प्रसामान्य (Normal)	...ता ...ed or Skewed to the Right	ऋणात्मक विषमता (Negatively Skewed or Skewed to the Right)



रेखाचित्र 04

6.4 विषमता (Skewness):

विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है। एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं। (A distribution is said to be skewed if it is lacking in symmetry that is in the measure tend to pile up at one end or the other of the range of measures) सिम्पसन औ... :- 'विषमता ... एक आवृत्ति वि... की विशेषता है जे... क्षा अधिक झुक जाता है।' (Skewness or asymme... ...tribution that extends further on one side of class ... uency than on the other) मौरिस हमबर्ग के अनुसार:- "विषमता एव ... ...ममितता अथवा सममितता के अभाव को आकार के रूप में बतलाता है। यह लक्षण केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुल मापों के प्रतिनिधि का निर्णय हेतु विशेष महत्व का है। (Skewness refers to the asymmetry or lack of symmetry in the shape of a frequency distribution. This characteristic is of particular importance in connection with judging the typicality of certain measures of central tendency.

संक्षेप में, किसी वितरण की सममितता से दूर हटने की प्रवृत्ति ही विषमता कहलाती है।

विषमता धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है। धनात्मक एवं ऋणात्मक मात्रा ज्ञात करने हेतु विषमता के मापों का उपयोग किया जाता है। विषमता के चार माप होते हैं तथा इनमें से प्रत्येक माप को दो रूपों में प्रदर्शित किया जा सकता है, जिन्हें निरपेक्ष माप (Absolute Measure) तथा सापेक्ष माप (Relative Measure) कहते हैं। विषमता के निरपेक्ष माप द्वारा विषमता की कुल मात्रा (Degree) तथा धनात्मक (+) व ऋणात्मक (-) प्रकृति मात्र ही ज्ञात हो पाती है। यह माप तुलनात्मक अध्ययन हेतु उपयुक्त नहीं होता। अत: दो या दो से अधिक वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन हेतु विषमता का सापेक्ष माप महत्वपूर्ण होता है। ये सापेक्ष माप विषमता गुणांक (Coefficient of Skewness) कहलाता है, जिसे संकेताक्षर (J) द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिस श्रेणी का विषमता गुणांक कम होता है तो वितरण में विषमता न्यून अथवा विषमता का अभाव या सममित वितरण होता है।

6.5 विषमता गुणांक का परिकलन (Computation of the measures of Skewness):

विषमता गुणांक का परिकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से किया सकता है , जो इस प्रकार है:-

i. कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson’s Measure)

ii. बाउले का माप (Bowley's Measure)

iii. केली का माप (Kelly's Measure)

1. **कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson's Measure):-** यह माप समंक श्रेणी के माध्यों की स्थिति पर निर्भर करता है। एक विषम आवृत्ति वितरण में समान्तर माध्य, मध्यिका तथा बहुलक के मूल्य समान नहीं होते हैं। इन माध्यों के मध्य अन्तर जितना अधिक होगा वितरण उतना ही अधिक विषम होगा। यह धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। निरपेक्ष माप को प्रमाप विचलन (S.D.) से विभाजित करने पर सापेक्ष माप ज्ञात किया जा सकता है। इस माप के निम्न सूत्र है:-

i. Skewness (S_k) = Mean $(\bar{X})$ - Mode (z) = निरपेक्ष माप

ii. Coefficient of Skewness (J) = $\frac{Mean(x) - Mode(z)}{S.D.(\sigma)}$ = सापेक्ष माप

यदि किसी श्रेणी में बहुलक मूल्य का निर्धारण संभव न हो तो वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है, जो कार्ल पियर्सन का द्वितीय माप (Second Measure of Skewness) कहलाता है। इसके सूत्र निम्नवत है:-

i. Skewness (S_k) = 3 (Mean – Median) = निरपेक्ष माप

ii.Coefficient of Skewness (i) = $\frac{3 \quad (Mean - Median)}{S.D.(\sigma)}$ = सापेक्ष माप

कार्ल पियर्सन का वैकल्पिक सूत्र (Alternative Formula) माध्यों के मध्य आनुपातिक संबंध, Mode = 3 M_d – 2 Mean पर आधारित है।

उदाहरण 1:- दो वितरणों से संबंधित आकंड़ों के आधार पर माप बताइए कि प्रस्तुत वितरण में किस प्रकार की विषमता है और कौन से वितरण में अधिक विषमता है।

	वितरण - I	**वितरण- II**
Mean (माध्य)	10	9
Median (माध्यिका)	9	10
Standard Deviation (प्रमाप विचलन)	2	2

हल:- इस प्रश्न में बहुलक का मूल्य नहीं दिया गया है, अत: कार्ल पियर्सन का द्वितीय सूत्र प्रयुक्त किया जाएगा।

वितरण - I

$$j = \frac{3 \quad (Mean - Median)}{S.D.} = \frac{3 \quad (10 - 9)}{2} = +1.5$$

$$i = \frac{3 \quad (Mean - Median)}{} = \frac{3 \quad (9 - 10 /)}{} = -1.5$$

वितरण – II $\quad S.D. \quad 2$

स्पष्ट है कि वितरण- I , धनात्मक रूप से विषम व वितरण– II ऋणात्मक रूप से विषम है। दोनों वितरणों में विषमता की मात्रा समान है।

<u>बाउले का माप (Bowleys' Measures):-</u> डा0 ए0एल0 बाउले द्वारा प्रतिपादित माप मध्यिका और चतुर्थकों पर आधारित है। एक सममित वितरण में मध्यिका से प्रथम और तृतीय चतुर्थकों के अन्तर समान दूरी पर होते हैं तथा इनके असमान होने पर वितरण में विषमता पायी जाती है। यह अन्तर जितना अधिक होता है, विषमता उतनी अधिक होती है। चतुर्थकों तथा मध्यिका के आधार पर ज्ञात किए जाने वाले विषमता के माप को विषमता का द्वितीय माप (Second Measures of Skewness) अथवा चतुर्थांक विषमता का माप (Quartile Measure of Skewness) भी कहते हैं। विषमता के इस माप का प्रयोग ऐसी स्थिति में किया जाता है, जब एक वितरण के बहुलक निश्चित न हों। इस माप का प्रयोग खुले शीर्षक वाले वर्ग होने की स्थिति में भी किया जा सकता है। इसका सूत्र निम्नवत है:-

बाउले का विषमता माप (विषमता का चतुर्थांक माप) :-

$Sk = (Q_3 – Md) – (Md – Q_1) \text{ or } Q_3 + Q_1 – 2\ Md$

बाउले का विषमता गुणांक (विषमता का चतुर्थांक गुणांक)

$$J_Q = \frac{(Q_3 - Md) - (Md - Q_1)}{(Q_3 - Md) + (Md - Q_1)} \quad or \quad \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ Md}{Q_3 - Q_1}$$

2. **केली का माप (Kelly's Measure):-** केली का माप उपर्युक्त दोनों मापों का मध्य मार्ग है। कार्ल पियर्सन का माप एक वितरण की समस्त मदों पर आधारित है, जबकि डा0 बाउले का माप मध्य की 50 प्रतिशत मदों पर ही आधारित है। केली के माप के अन्तर्गत मध्य की 80 प्रतिशत मदों पर ध्यान दिया जाता है। इस माप के अन्तर्गत वितरण के 90 वॉ शतमक (Percentile) और 10वॉ शतमक (Percentile) (अथवा दशमक 9 व दशमक 1) के मध्य की मदों पर ध्यान दिया जाता है:-

   इस माप पर आधारित सूत्र निम्नवत है:-

$$Skewness\ (S_k) = P_{90} - P_{10} - 2_{P_{50}} \quad or \quad D_9 - D_1 - 2D_5$$

$$\text{Coefficient of Skewness } (J_P) = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}} \quad or \quad \frac{D_9 + D_1 - 2D_5}{D_9 - D_1}$$

केली द्वारा प्रस्तावित विषमता माप बहुत सरल है, किन्तु यह वितरण की मात्र 80 प्रतिशत भाग की विषमता का ही मापन करती है। अत: इसका व्यवहार में प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

6.6 पृथुशीर्षत्व या कुकुदता (Kurtosis):-

पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक साँख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। ग्रीक भाषा में इस शब्द का अर्थ फुलावट (Bulginess) होता है। साँख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या

नुकीलापन की मात्रा से है। सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार- "एक वितरण में पृथुशीर्षत्व की मात्रा का माप सामान्य वक्र के बनावट के संबंध में की जाती है (The degree of kurtosis of a distribution is measured relative to the peakedness of a normal curve)''

क्राक्स्टन एवं काउडेन के शब्दों में :- "पृथुशीर्षत्व का माप उस मात्रा को व्यक्त करता है, जिसमें एक आवृत्ति वितरण का वक्र नुकीला अथवा चपटे शीर्ष वाला होता है। (A measure of Kurtosis indicates the degree to which a curve of the frequency distribution is peaked or flat-topped).

सी0एच0 मेयर्स के शब्दों में – "पृथुशीर्षत्व से आशय वितरण के मध्य के नुकीलेपन के परिणाम से है (Kurtosis is the property of a distribution which expresses relative peaked ness)''

वक्र का शीर्ष नुकीला है अथवा चपटा इसका मूल्यांकन मध्य शीर्ष वाले वक्र जिसे सामान्य वक्र या Mesokurtic कहते हैं, के आधार पर किया जाता है। निम्न रेखाचित्रों में इन तीनों प्रकार के वक्रों को प्रदर्शित किया गया है:-

कार्ल पियर्सन ने 1905 में निम्न तीन शब्दों का प्रयोग किया था:-

i. LEPTOKURTIC (लेप्टोकर्टिक): नुकीले शीर्ष वाला वक्र (Peaked Curve)
ii. PLATYKURTIC (प्लेटीकर्टिक) : चपटे शीर्ष वाला वक्र (Flat-topped Curve)
iii. MESOKURTIC (मेसोकर्टिक) : सामान्य वक्र (Normal Curve)

वक्र का शीर्ष नुकीला है अथवा चपटा, इसका मूल्यांकन मध्य शीर्ष वाले वक्र जिसे सामान्य वक्र या मेसोकर्टिक (Mesokurtic) कहते हैं, के आधार पर किया जाता है। निम्न रेखाचित्रों में इन तीनों प्रकार के वक्रों को प्रदर्शित किया गया है। उपर्युक्त तीनों रेखाचित्रों के स्थान पर एक ही रेखाचित्र से पृथुशीर्षत्व के विभिन्न प्रकारों को समझा जा सकता है।

6.7 पृथुशीर्षत्व का माप (Measurement of Kurtosis):

पृथुशीर्षत्व का माप चतुर्थ एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है। कार्ल पियर्सन के अनुसार, पृथुशीर्षत्व को

अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है। कार्ल पियर्सन के अनुसार, पृथुशीर्षत्व की परिकलन का सूत्र निम्न प्रकार से है:-

$$\beta_2 \ (Beta\ two) = \frac{\mu_4 \quad (fourth \quad moment)}{\mu_2 \quad (second \quad moment)}$$

जहाँ
$$\mu_4 = \frac{\Sigma d^4}{N} = \frac{\Sigma (X - \overline{X})^4}{N}$$

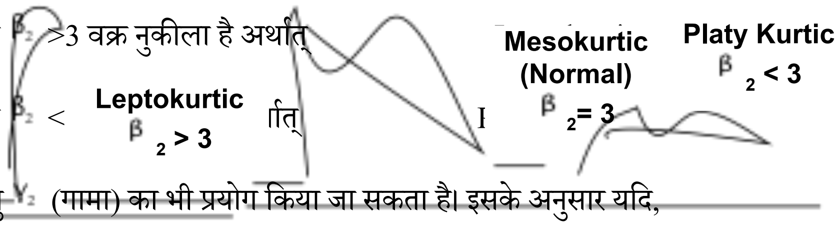
$$\mu_2 = \frac{\Sigma d^2}{N} = \frac{\Sigma (X - \overline{X})^2}{N}$$

सामान्य वितरण में β_2 का मान 3 के बराबर होता है। यदि β_2 का मान 3 से अधिक है तो वक्र का शीर्ष नुकीला (Leptokurtic) होगा, जबकि इसका मान 3 से कम है तो शीर्ष चपटा (Platykurtic) होगा।

संकेतानुसार – यदि $\beta_2 = 3$ वक्र सामान्य है अर्थात् Mesokurtic

यदि $\beta_2 > 3$ वक्र नुकीला है अर्थात्

यदि $\beta_2 <$ ... र्थात् ... P



पृथुशीर्षत्व के माप हेतु γ_2 (गामा) का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके अनुसार यदि,

γ_2 or $\beta - 3$ = वक्र सामान्य है Mesokurtic

γ_2 धनात्मक है, तो वक्र नुकीला होगा अर्थात् Leptokurtic

γ_2 ऋणात्मक है, वक्र चपटा होगा अर्थात् Platykurtic

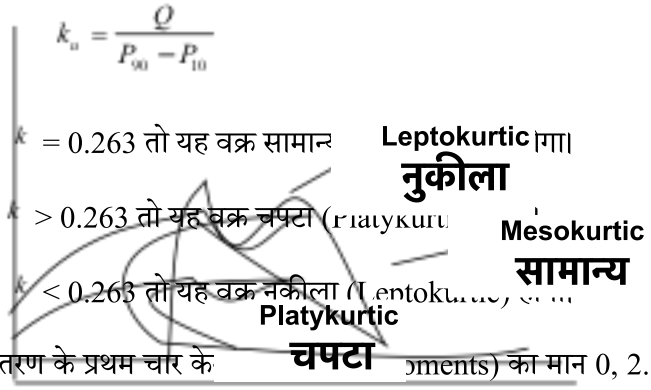
पृथुशीर्षत्व के माप का वैकल्पिक सूत्र:- पृथुशीर्षत्व के माप का परिकलन निम्न सूत्र की मदद से भी ज्ञात की जा सकती है:-

$$k_u = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

यदि $k = 0.263$ तो यह वक्र सामान् ... गा।

यदि $k > 0.263$ तो यह वक्र चपटा (Platykurt...

यदि $k < 0.263$ तो यह वक्र नुकीला (Leptokurtic) ...



उदाहरण:- किसी वितरण के प्रथम चार के ... oments) का मान 0, 2.5, 0.7 तथा 18.75 है। विषमता तथा पृथुशीर्षत्व का परीक्षण कीजिए।

हल:- विषमता (Skewness) के लिए:-

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^2} = \frac{(0.7)^2}{(2.5)^3} \quad 0r\ \frac{0.49}{15.625} = +0.03$$

पृथुशीर्षत्व (Kurtosis) के लिए:- $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{(2.5)^2}\ or\ \ 3$ X= M= Z

$(Q_3\text{- Md}) = (\text{Md-}Q_1)$

चूंकि $\beta_1 = + 0.03$ है, वितरण पूर्ण रूप से सममित (Symmetrical) नहीं है1 इसी प्रकार $\beta_2 =$ 3 है, अत: वितरण सामान्य या Mesokurtic है।

6.8 प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution):

प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution) एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है तथा यह वक्र प्रसामान्य बंटन के दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) पर आधारित होता है। इस बंटन को विकसित करने में 18वीं शताब्दी के गणितज्ञ कार्ल गॉस का बहुत बड़ा योगदान रहा है। अत: इस बंटन को **गॉस का बंटन (Gaussian Distribution)** भी कहते हैं। इसे अन्य नामों से जैसे **त्रुटि वक्र (Curve of error)**, **डीमोवर्स वक्र (Demovere's Curve)** और **घंटाकार वक्र (Bell Shaped Curve)** के नाम से भी जाना जाता है।

प्रसामान्य प्रायिकता घनत्व फलन (Normal Probability Density function), जिसके आधार पर घंटीनुमा आकार का वक्र बनता है, के समीकरण को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :-

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(X-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$ जहां $-\infty \leq x \geq \infty$

यहाँ μ = समान्तर माध्य

σ = प्रमाप विचलन

π = 3. 14159

e = 2.71828

6.9 प्रसामान्य वक्र (Normal Curve):

प्रसामान्य वक्र से तात्पर्य वैसे वक्र से होता है, जिसके द्वारा प्रसामान्य वितरण (normal distribution) का प्रतिनिधित्व होता है। प्रसामान्य वितरण का अर्थ वैसे वितरण से होता है जिससे बहुत सारे मद/केसेज/इकाई (cases) मापनी के बीच में आते है तथा बहुत कम मद/केसेज/इकाई मापनी के ऊपरी छोर तथा बहुत कम केसेज मापनी के निचली छोर पर आते हैं। मनोविज्ञान तथा शिक्षा में अध्ययन किए जाने वाले अधिकतर चर (Variable) पर आये प्राप्तांक चूँकि प्रसामान्य रूप से वितरित होते हैं, अत: इस वक्र की उपयोगिता काफी अधिक है। बुद्धि, शाब्दिक बोध क्षमता (Verbal Comprehension ability) आदि कुछ ऐसे चर हैं, जो प्रसामान्य रूप से वितरित होते हैं। अत: इनमे बनने वाला वक्र प्रसामान्य वक्र होगा। प्रसामान्य वक्र को गणितीय समीकरण के रूप

में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{\pi}} \quad e^{-}\frac{x^2}{2\sigma^2}$$

(Equation of the normal Probability curve)

जिसमें x = अंक (माध्य से विचलन के रूप में) x अक्ष पर रखा जाता है।

y = अक्ष के ऊपर वक्र की ऊँचाई जो x मान की बारंबारता को प्रदर्शित करता है।

N = केसेज की सख्या

σ = प्रमाप विचलन (वितरण का)

π = 3.1416

e = 2.7183

जब N और σ दिया रहता है तो किसी भी x मान के लिए बारंबारता (y) का मान उक्त समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है।

6.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Features of a Normal Curve):

1. इस वक्र का एक ही शीर्ष बिन्दु होता है, अर्थात् यह एक बहुलकीय (Unimodal) वक्र है। इसका आकार घंटीनुमा (Bell Shaped) होता है।

यह एक सममित वक्र (Symmetrical curve) है। अर्थात माध्य से या बीच से दायें का भाग बायें भाग का दर्पण प्रतिबिम्ब होता है। मध्य से दायें भाग का क्षेत्रफल और मध्य से बायें भाग का क्षेत्रफल, दोनों का मान एक समान होता है। इसका विषमता गुणांक 0 यानि यह Mesokurtic वक्र होता है।

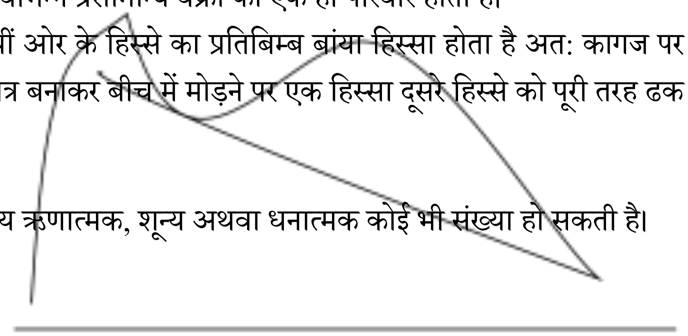
2. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यिका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के मध्य में स्थित होते हैं।

3. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु अपरिमित (Infinite) रूप से विस्तृत होती है। यही कारण है कि यह आधार रेखा को कभी नहीं छूता। अर्थात् यह वक्र asymptotic होता है।

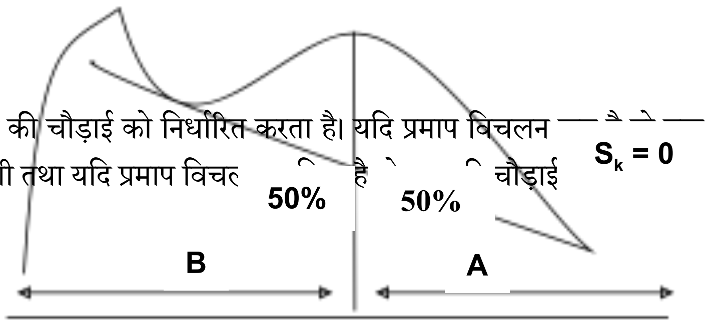
4. इस वक्र के दो प्राचल होते हैं, समान्तर माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन (σ)। प्रत्येक μ तथा σ के समुच्चय के लिए एक नया प्रसामान्य वक्र होता है। अत: प्रसामान्य वक्र एक न होकर अनेक होते हैं, अत: विभिन्न प्रसामान्य वक्रों का एक ही परिवार होता है।

5. समान्तर माध्य की दायीं ओर के हिस्से का प्रतिबिम्ब बांया हिस्सा होता है अत: कागज पर प्रसामान्य वक्र का चित्र बनाकर बीच में मोड़ने पर एक हिस्सा दूसरे हिस्से को पूरी तरह ढक लेता है।

6. प्रसामान्य वक्र का माध्य ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक कोई भी संख्या हो सकती है।

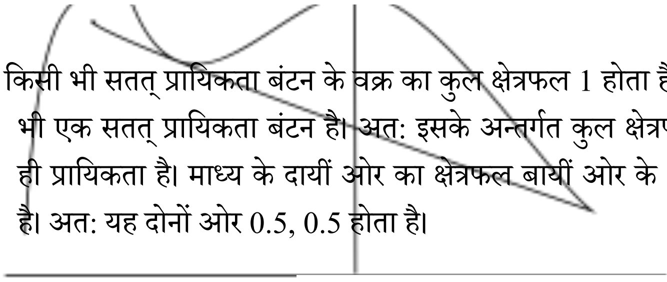


7. प्रमाप विचलन, वक्र की चौड़ाई को निर्धारित करता है। यदि प्रमाप विचलन ... की चौड़ाई कम होगी तथा यदि प्रमाप विच ... चौड़ाई



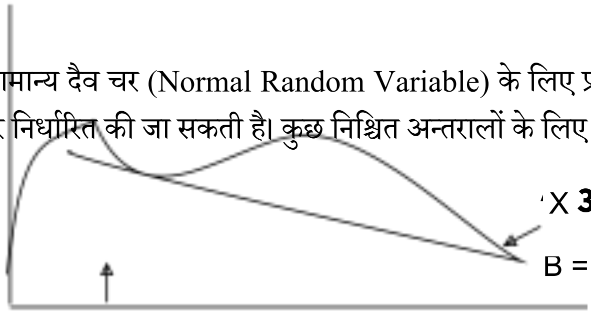
A भाग का क्षेत्रफल = B भाग का क्षेत्रफल

8. किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन के वक्र का कुल क्षेत्रफल 1 होता है, क्योंकि प्रसामान्य वक्र भी एक सतत् प्रायिकता बंटन है। अत: इसके अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल 1 होता है। क्षेत्रफल ही प्रायिकता है। माध्य के दायीं ओर का क्षेत्रफल बायीं ओर के क्षेत्रफल के बराबर होता है। अत: यह दोनों ओर 0.5, 0.5 होता है।



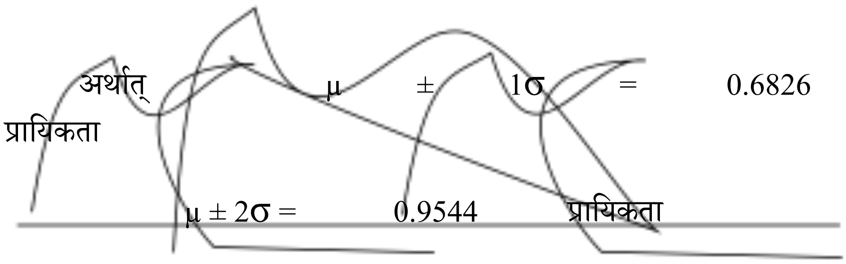
Mean = Median = Mode

9. प्रसामान्य दैव चर (Normal Random Variable) के लिए प्रायिकता क्षेत्रफल के आधार पर निर्धारित की जा सकती है। कुछ निश्चित अन्तरालों के लिए प्रायिकताएँ निम्न प्रकार हैं:-



B = ± 2σ = 95.44% केसेज

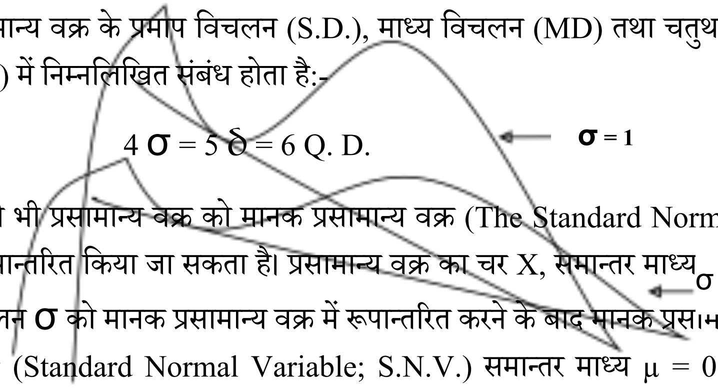
C $\bar{X}$ ± 3σ = 99.72% केसेज



अर्थात् μ ± 1σ = 0.6826 प्रायिकता

μ ± 2σ = 0.9544 प्रायिकता

10. प्रसामान्य वक्र के प्रमाप विचलन (S.D.), माध्य विचलन (MD) तथा चतुर्थांक विचलन (QD) में निम्नलिखित संबंध होता है:-

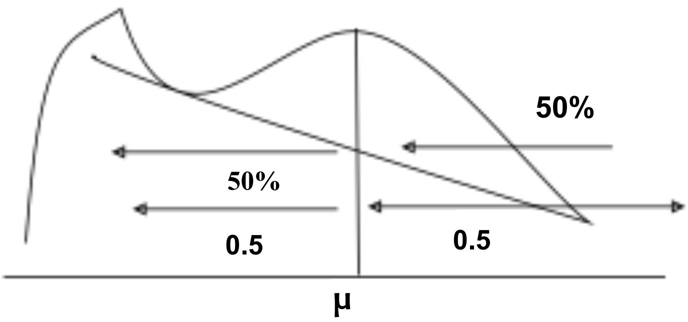


4 σ = 5 δ = 6 Q. D.

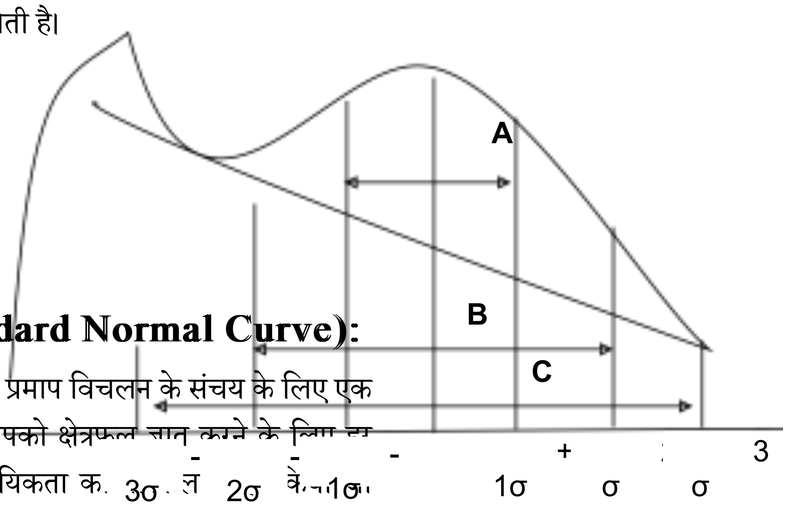
11. किसी भी प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र (The Standard Normal Curve) में रूपान्तरित किया जा सकता है। प्रसामान्य वक्र का चर X, समान्तर माध्य माप विचलन σ को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित करने के बाद मानक प्रसामान्य वक्र का चर z (Standard Normal Variable; S.N.V.) समान्तर माध्य μ = 0 तथा प्रमाप

विचलन σ = 1 हो जाता है।

12. प्रसामान्य वक्र में μ + σ और μ - σ μ संक्रमण (Inflection or transitions) बिन्दु होता है, जहाँ से वक्र का रूप अवतल से उत्तल होता जाता है।



13. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है और इकाई प्रसामान्य वक्र (unit normal curve) में इसकी ऊँचाई 0.3989 होती है।



6.11 मानक प्रसामान्य वक्र (The Standard Normal Curve):

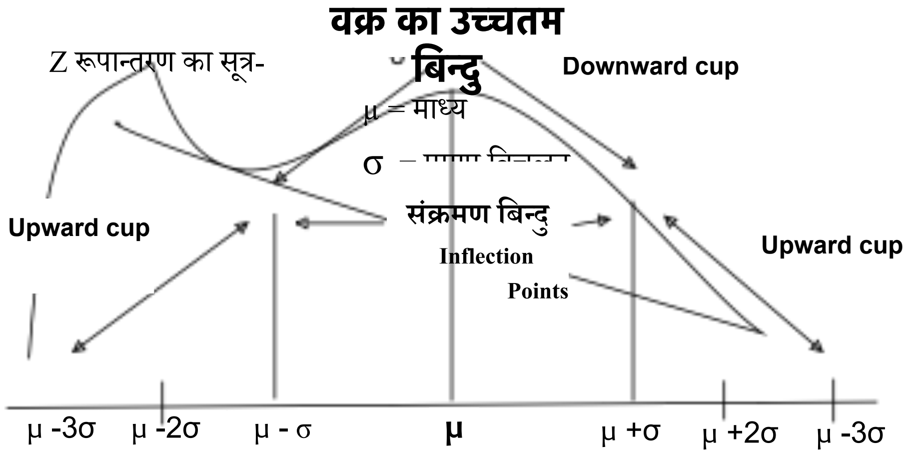
इससे पहले यह स्पष्ट किया जा चुका है कि प्रत्येक माध्य तथा प्रमाप विचलन के संचय के लिए एक पृथक प्रसामान्य वक्र का आसंजन (draw) करना होगा। आपको क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हर बार एक प्रसामान्य वक्र की रचना करनी होगी, अन्यथा प्रायिकता का ज्ञान नहीं हो सकेगा। यह एक कठिन कार्य होगा। इससे बचने का एकमात्र उपाय है कि सभी प्रकार के प्रसामान्य वक्रों को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित करना। एक बार प्रसामान्य वक्र मानक रूप में रूपान्तरित होने के पश्चात् केवल एक ही वक्र के आधार पर प्रायिकता (क्षेत्रफल) निर्धारित करना सरल होता है।

6.12 मानक प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Characteristic of the Standard Normal Curve) :

1. मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य 0 होता है।
2. मानक प्रसामान्य वक्र का प्रमाप विचलन 1 होता है।
3. इसका शीर्ष बिन्दु शून्य पर स्थित होता है, क्योंकि इसका बहुलक शून्य ही है। इसका मध्यिका भी शून्य होता है।
4. इसमें प्रसामान्य वक्र की अन्य सभी विशेषताएँ होती हैं।
5. **Z रूपान्तरण (z-transformation):-** किसी दिये गये प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र में परिवर्तित करने के लिए X चर को Z चर में परिवर्तित करने को Z रूपान्तरण (z-transformation) कहते हैं। Z रूपान्तरण करने पर समान्तर माध्य 0 तथा प्रमाप विचलन 1 हो जाता है।

   उदाहरणस्वरूप यदि किसी प्रसामान्य वक्र का माध्य 100 तथा प्रमाप विचलन 25 है तब

150 का अर्थ $Z = \frac{150 - 100}{25} = +2$ तथा 75 का अर्थ $\frac{75 - 100}{25} = -1$ होगा। इसका अर्थ है 150 समान्तर माध्य से Z प्रमाप विचलन आगे (दायीं ओर) है, जबकि 75 समान्तर माध्य से 1 प्रमाप विचलन (बायीं ओर) है।



अपनी अधिगम प्रगति जानिए

1. मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य .... होता है।
2. मानक प्रसामान्य वक्र का प्रमाप ि.3989 …होता है।
3. मानक प्रसामान्य वक्र में 4 σ = 5 δ = 6 (...........).होता है।
4. मानक प्रसामान्य वक्र में μ ± 2σ = (………) प्रायिकता होती है।
5. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है और इकाई प्रसामान्य वक्र (unit normal curve) में इसकी ऊँचाई ……. होती है।
6. प्रसामान्य बंटन दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथा …………….पर आधारित होता है।
7. यदि प्रमाप विचलन कम है तो वक्र की चौड़ाई ……..होगी।
8. यदि प्रमाप विचलन अधिक है तो वक्र की चौड़ाई ……….होगी।
9. यदि k = 0.263 तो यह वक्र ………………..होगा।
10. Z रूपान्तरण करने पर समान्तर माध्य ……….तथा प्रमाप विचलन 1 हो जाता है।

6.13 प्रसामान्य वक्र की उपयोगिताएँ या अनुप्रयोग (Application of Normal Curve):

प्रसामान्य वक्र या जिसे प्रसामान्य प्रसंभाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) भी कहा जाता है, के कुछ प्रमुख अनुप्रयोग को निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है:-

1. प्रसामान्य वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दी गई सीमाओं (Limits) के भीतर पड़ने वाले केसेज के प्रतिशत का पता लगाया जाता है। यह प्रसामान्य वक्र की एक प्रमुख

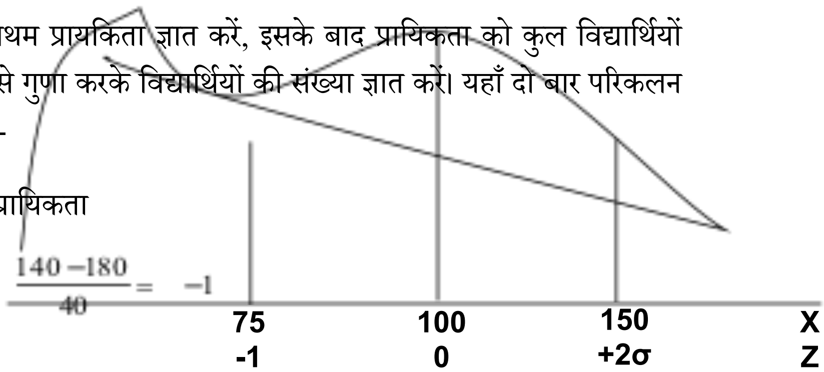
उपयोगिता है। जब शोधकर्ता को प्रसामान्य वितरण का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात होता है तो वह वितरण के किसी भी दो प्राप्तांकों के बीच आने वाले केसेज का पता प्रसामान्य वक्र के द्वारा आसानी से कर लेता है।

उदाहरण:- एक परीक्षा के प्राप्तांकों का बंटन प्रसामान्य बंटन (वितरण) है, इसका माध्य 180 अंक तथा प्रमाप विचलन 40 अंक है। एक परीक्षा में यदि 10,000 विद्यार्थी सम्मिलित हुए तो (अ) 140 से 150 के मध्य अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या बताइए।

हल:- (अ) सर्वप्रथम प्रायकिता ज्ञात करें, इसके बाद प्रायिकता को कुल विद्यार्थियों की संख्या से गुणा करके विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करें। यहाँ दो बार परिकलन करना होगा-

i. 140 से 180 अंक की प्रायिकता

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{140 - 180}{40} = -1$$



ii. 150 से 180 अंक की प्रायिकता

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{150 - 180}{40} = -0.75$$

P= (Z = 0.75) = 0.2734

अत: 140 से 150 अंक की प्रायिकता = 0.3413 - 0.2734 = 0.0679

अत: विद्यार्थियों की संख्या = 10,000 X 0.0679 = 679

ii. प्रसामान्य वितरण वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दिये गये केसेज के प्रतिशत के आधार पर उनकी सीमाओं का पता लगाया जाता है। जब शोधकर्ता को प्रसामान्य वितरण का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात होता है और वह वितरण के विशेष प्रतिशत जैसे मध्य 60% या 70% केसेज की सीमाओं का पता लगाना चाहता है, तो वह प्रसामान्य वक्र का उपयोग करता है, क्योंकि इससे वह आसानी से इन सीमाओं के बारे में जान लेता है।

iii. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समस्या या परीक्षण के एकांश के सापेक्ष कठिनता स्तर (relative difficulty level) ज्ञात किया जा सकता है। प्रसामान्य वक्र का एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग यह है कि इसके द्वारा शोधकर्ता किसी प्रश्न, समस्या या किसी परीक्षण के एकांश की सापेक्ष कठिनता स्तर का पता आसानी से लगा लेता है। इसके लिए प्रत्येक प्रश्न या एकांश पर उत्तीर्ण होने वाले छात्रों की प्रतिशत के आधार पर सिगमा या Z प्राप्तांक (Sigma Score) ज्ञात कर लिया जाता है, जो इसकी कठिनता स्तर होती है और इस कठिनता स्तर को एक दूसरे से घटाकर जो अंतर प्राप्त किया जाता है, इससे प्रश्नों या एकांशों का सापेक्ष कठिनता स्तर का पता लग जाता है।

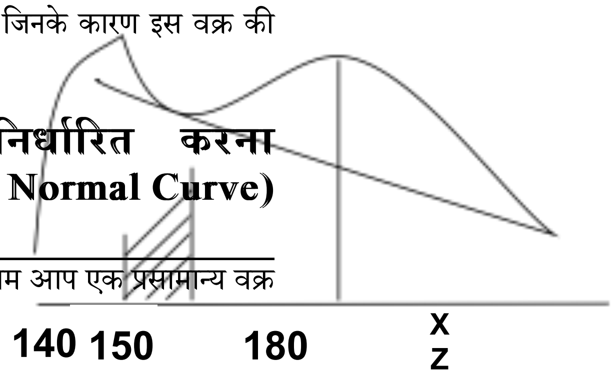
iiii. प्रसामान्य वक्र द्वारा दो वितरणों की अतिव्याप्ति (Overlapping) के रूप में तुलना किया

जाता है। प्रसामान्य वक्र की चौथी उपयोगिता यह है कि इसके द्वारा दो वितरणों की तुलना अतिव्याप्ति के रूप में की जाती है। जब शोधकर्ता यह पता लगाना चाहता है कि दिए गए दो वितरणों में माध्य माध्यिका (Median) तथा मानक विचलन के ख्याल से कहाँ तक अतिव्याप्ति है तो इसके लिए प्रसामान्य वक्र का सहारा लेता है।

v. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समूह को उपसमूह में आसानी से प्रसामान्य रूप से वितरित शीलगुण या चर के आधार पर बाँटा जाता है। प्रसामान्य वक्र का उपयोग प्राय: शोधकर्ता वैसी परिस्थिति में करता है जहाँ प्रसामान्य रूप से किसी वितरित, किसी शीलगुण या चर पर दिए गए समूह के कई छोटे-छोटे उपसमूहों में बाँटना होता है। यह कार्य भी Z- score ज्ञात करके किया जाता है।

अत: यह स्पष्ट है कि प्रसामान्य वक्र की अनेक उपयोगिताएं है, जिनके कारण इस वक्र की लोकप्रियता व्यावहारिक विज्ञान के क्षेत्र में बहुत ज्यादा है।

6.14 प्रसामान्य वक्र में प्रायिकता निर्धारित करना (Determination of Probability under the Normal Curve) :



1. प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत प्रायिकता ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम आप एक प्रसामान्य वक्र का चित्र बनाएँ।
2. इसके मध्य में समान्तर माध्य लिख लें।
3. अब प्रायिकता ज्ञात करने के लिए X के मूल्यों को सूत्र द्वारा Z में रूपान्तरित कर लें।
4. मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल (Area under the normal curve) की सारणी जो इस स्व-अधिगम सामग्री पुस्तिका के पीछे दी गई है, के आधार पर क्षेत्रफल ज्ञात कर लें। क्षेत्रफल ही प्रायिकता है।
5. प्रायिकता ज्ञात करते समय यह ध्यान रखें कि सारणी में क्षेत्रफल सदैव समान्तर माध्य (Z = 0) से X मूल्य (Z का परिकलित मूल्य) तक दिया जाता है, अत: क्षेत्रफल (प्रायिकता) तदनुसार निर्धारित की जाती है। प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल 1.0 होता है जो माध्य के दायीं ओर 0.5 तथा बायीं ओर भी 0.5 होता है।

उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण:-

i. किसी मूल्य के 100 से 150 के मध्य

होने की प्रायिकता :-

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ $\qquad$ $\frac{150 - 100}{25} = Z$

Area (Z= 2) = 0.47725 (सारणी से)

अत: वांछित प्रायिकता = 0.47725

ii. किसी मूल्य के 150 से कम होने की प्रायिकता

आप जानते हैं कि समान्तर माध्य से किसी मूल्य के कम होने की प्रायिकता = 0.5, जबकि समान्तर माध्य (100 से 150 तक की प्रायिकता) उपर्युक्त (i) के अनुसार 0.47725 है अत: वांछित प्रायिकता =0.5+ 0.47725 = 0.97725

iii. किसी मूल्य के 150 से अधिक होने की प्रायिकता

= प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत कुल क्षेत्रफल- किसी मूल्य के 150 से कम होने की प्रायिकता = 1- 0.97725 = 0.02275

किसी मूल्य के 75 से 150 के मध्य होने की प्रायिकता:-

यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रसामान्य वक्र के क्षेत्रफल निर्धारण का सन्दर्भ बिन्दु सदैव माध्य होता है अत: वांछित प्रायिकता दो अलग-अलग भागों में परिकलित करेंगें।

किसी मूल्य के 75 से 100 के मध्य होने की प्रायिकता + किसी मूल्य के 100 से 150 के मध्य होने की प्रायिकता।

$$Z = \frac{75 - 100}{25} = -1$$

Z = -1 के लिए क्षेत्रफल 0.34134

अत: वांछित प्रायिकता (0.34134+0.47725) = 0.81859

टिप्पणी:- Z = -1 से विचलित होने की आवश्यकता नहीं है, Z के ऋणात्मक मूल्य का अर्थ होता है। माध्य के बायीं ओर जबकि Z के धनात्मक मूल्य का अर्थ होता है, माध्य के दायीं ओर। लेकिन Z के ऋणात्मक मूल्य के कारण प्रायिकता को ऋणात्मक नहीं कर दें, अन्यथा अनर्थ हो जाएगा। क्षेत्रफल (प्रायिकता) कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता।

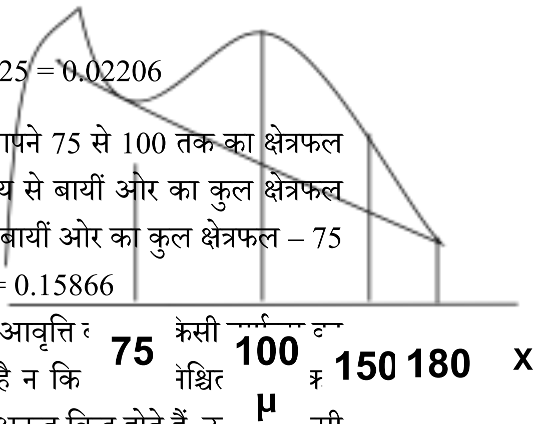
(iiii) किसी मूल्य के 150 से 180 के मध्य होने की प्रायिकता:- सन्दर्भ सदैव माध्य रहता है, अत: दो अलग-अलग माप करेंगें, 100 से 150 तथा 100 से 180: यहाँ 100 से 180 की माप के लिए $Z = \frac{180 - 100}{25} = 3.2$

Z = 3.2 के लिए क्षेत्रफल = 0.49931

अत: वांछित प्रायिकता = 0.49931 – 0.47725 = 0.02206

(v) किसी मूल्य के 75 से कम होने की प्रायिकता:- आपने 75 से 100 तक का क्षेत्रफल 0.34134 (iv) में ज्ञात किया है, जबकि माध्य से बायीं ओर का कुल क्षेत्रफल 0.5 होता है। अत: वांछित प्रायिकता माध्य से बायीं ओर का कुल क्षेत्रफल – 75 से 100 तक का क्षेत्रफल = 0.5 – 0.34134 = 0.15866

(vi) किसी मूल्य के 75 होने की प्रायिकता:- एक सतत् आवृत्ति ... किसी ... क्षेत्रफल (प्रायिकता) ज्ञात किया जा सकता है न कि ... निश्चित ... इसका कारण यह है कि किसी चर की रेखा में अनन्त बिन्दु होते हैं, ... किसी एक निश्चित बिन्दु के होने की प्रायिकता सैद्धान्तिक रूप से $\frac{1}{\infty} = 0$ होती है।



6.15 सामान्य संभावना वक्र के उपयोग के उदाहरण (Examples of the application of Normal Probability Curve) :

(i) **दी हुई सीमाओं के मध्य प्राप्तांकों का प्रतिशत ज्ञात करना (To find out the percentage of cases within given limits)**

उदाहरण:- एक प्रसामान्य वितरण में समान्तर माध्य (M) 80 और प्रमाप विचलन 10 है। गणना करके बताइये कि निम्नलिखित सीमाओं के मध्य कितने प्रतिशत केसेज होंगे।

a. 70 से 90 के मध्य
b. 90 से 100 के मध्य

हल (a) 70 का Z स्कोर $= \frac{70-80}{10} = \frac{-10}{-10} = -1\sigma$

90 का Z स्कोर $= \frac{90-80}{10} = \frac{10}{10} = +1\sigma$

70 से 90 के मध्य केसेज

= ± 1σ व -1 σ के

मध्य केसेज का प्रतिशत

= 34.13 + 34.13

= 68.26 प्रतिशत केसेज

(ब) 90 का Z स्कोर $= \frac{90-80}{10} = \frac{10}{10} = +1\sigma$

100 का Z स्कोर $= \frac{100-80}{10} = +2\sigma$

प्रसामान्य वितरण वक्र में 0 से +2 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 47.72

प्रसामान्य वितरण वक्र में 0 से +1 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 34.13

अत: +1 σ और +2 σ के मध्य प्रतिशत केसेज = 47.72- 34.13 = 13.59

(ii) **दो अतिव्यापी अंक वितरणों के प्राप्तांको का अध्ययन (To Compare the two Overlapping Distribution)**

उदाहरण:- किसी एक बुद्धि परीक्षण के छात्रों का मध्यमान 120 तथा प्रमाप विचलन 8.0 है तथा छात्राओं का मध्यमान 124 तथा प्रमाप विचलन 10.0 है। कितने प्रतिशत छात्राओं का मध्यमान छात्रों के मध्यमान से ऊपर है, इसकी गणना करें।

हल:- प्रस्तुत उदाहरण में छात्राओं का मध्यमान छात्रों से 124-120 = 4 ऊपर है। यदि छात्रों के

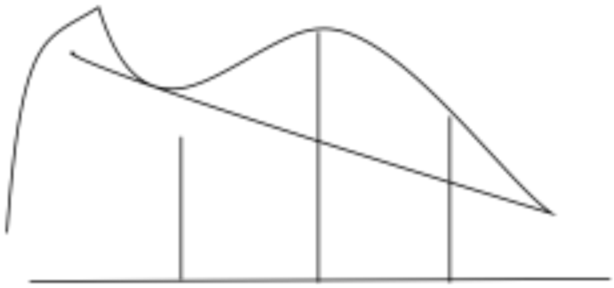
मध्यमान को आधार माना जाय तो यह कहा जा सकता है कि छात्राओं का मध्यमान छात्रों के 4/8 σ = 0.56 दायीं ओर स्थित है। तालिका के अनुसार मध्यमान से 0.56 तक 19.15 प्रतिशत तक केसेज आते हैं। चूंकि मध्यमान से दायीं दिशा (+) में 50 प्रतिशत केसेज आते हैं, अत: छात्रों की अपेक्षा छात्राओं का मध्यमान 50-19.15 = 30.85% आगे है।

छात्र का M = 120

σ = 8.0

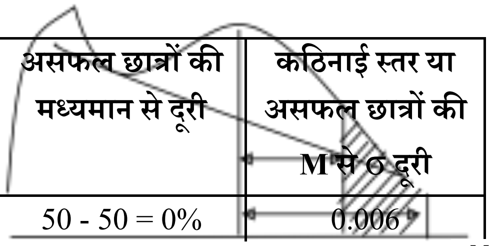
छात्राओं का M = 124

σ = 10.0



(iii) **मनोवैज्ञानिक परीक्षणों में पद क... के ...ो ि... करः ...o determine the level of item difficulty)**

उदाहरण:- एक प्रमाणीकृत परीक्षण के A, B, C तथा D प्रश्नों को हल करने में छात्र क्रमश: 50%, 40%, 35% तथा 15% असफल रहे। प्रश्नों के कठिनाई स्तर की गणना करते हुए इसकी व्याख्या कीजिए।



प्रश्न	सफल छात्रों का %	असफल छात्रों का %	असफल छात्रों की मध्यमान से दूरी	कठिनाई स्तर या असफल छात्रों की M से σ दूरी
A	50%	50%	50 - 50 = 0%	0.006
B	40%	60%	60-50 = 10%	[illegible]
C	35%	65%	65-50 = 15%	0.396
D	20%	80%	80-50 = 30%	0.846

NPC में परीक्षण के प्रश्नों की कठिनाई स्तर की व्याख्या σ के आधार पर की जाती है। धनात्मक दिशा में मध्यमान से सिग्मा दूरी जितनी अधिक होती है, परीक्षण के प्रश्न का कठिनाई स्तर उतना ही अधिक होता है। परीक्षा के विभिन्न प्रश्नों का तुलनात्मक कठिनाई स्तर निम्न प्रकार से है:-

A से B प्रश्न (0.256- 0.006) = 0.256 अधिक कठिन है

B से C प्रश्न (0.396 - 0.256) = 0.146 अधिक कठिन है

B से D प्रश्न (0.846 - 0.256) = 0.596 अधिक कठिन है

A से C प्रश्न (0.396 - 0.006) = 0.396 अधिक कठिन है

C से D प्रश्न (0.846 - 0.396) = 0.456 अधिक कठिन है

(iiii) **आवृत्ति ज्ञात करना (Calculate the frequency):-** प्रसामान्य वितरण में आवृत्ति ज्ञात करते समय प्रायिकता (P) को कुल आवृत्ति (N) से गुणा करना होता है। अत: आवृत्ति = NXP

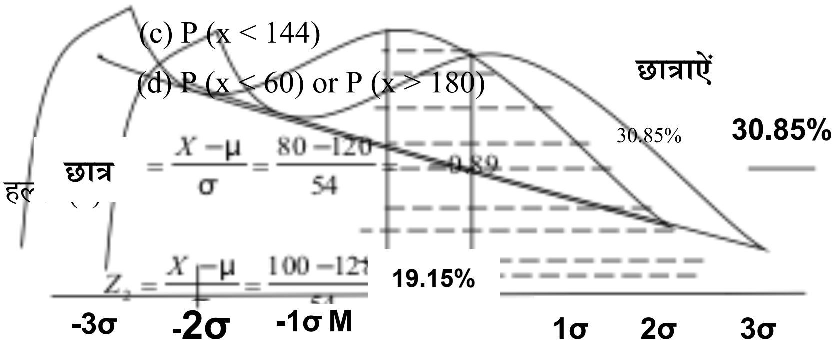
उदाहरण:- एक दैव चर (Random Variable) का बंटन (Distribution) प्रसामान्य है, जिसका माध्य 128 है तथा प्रमाप विचलन 54 है ज्ञात कीजिए।

(a) P (80 < x < 100)

(b) P (x > 40)

(c) P (x < 144)

(d) P (x < 60) or P (x > 180)



हल $= \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{80-120}{54} = -0.89$

$Z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{100-12}{54}$

Area (Z_1 = - 0.89) = 0.31 33

Area (Z_2 = - 0.52) = 0.1985 (घटाने पर)

P (80 < x < 100) = 0.1148

(b) $Z = \frac{40-128}{54} = 1.63$

Area (Z= ÷1.63) = 0.44845

Area (above 128) = 0.50000 (जोड़ने पर)

P (x > 40) = .94845

(c) $Z = \frac{144-128}{54} = \frac{16}{54} = 0.30$

Area (Z = 0.30) = 0.1179

Area (below 128) = 0.5000

P (X < 144) = 0.6179

(d) $Z_1 = \frac{60-128}{54} = 1.26$

Area(below 128) = 0.50000

Area (Z_1 = - 1.26) = 0.39617 (+)

= 0.10383

$$Z_2 = \frac{180 - 128}{54} = 0.96$$

Area above (128) = 0.50000

Area (Z_2 = 0.96) = 0.3315

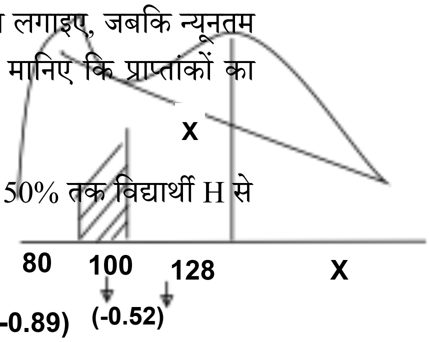
0.1685

P (x < 60) or P (x >180)

= 0.10383 + 0.1685

= 0.27233

उदाहरण:- किसी एक परीक्षा में पास होने वाले विशेष योग्यता प्राप्त करने वाले विद्यार्थी क्रमश: 46% तथा 90% थे। अभ्यर्थियों द्वारा प्राप्त औसत प्राप्तांकों का अनुमान लगाइए, जबकि न्यूनतम पास प्राप्तांक तथाविशेष योग्यता प्राप्तांक क्रमश: 40 तथा 75 है। यह मानिए कि प्राप्तांकों का वितरण सामान्य है।



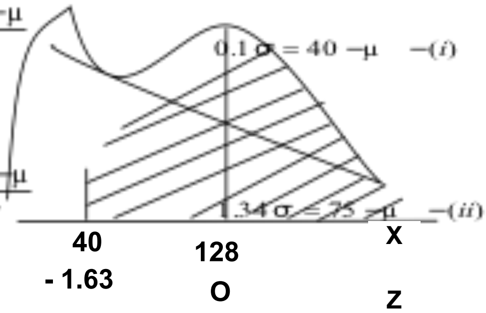
हल:- यहाँ पास विद्यार्थी 46 प्रतिशत है, अत: फेल विद्यार्थी 54% होंगें, 50% तक विद्यार्थी H से ऊपर होंगे।

$$Z\,(P = 0.4) = 0.1$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad 0.1 = \frac{40 - \mu}{\sigma} \qquad 0.1\sigma = 40 - \mu \quad -(i)$$

$$Z\,(P = .41) = 1.34$$

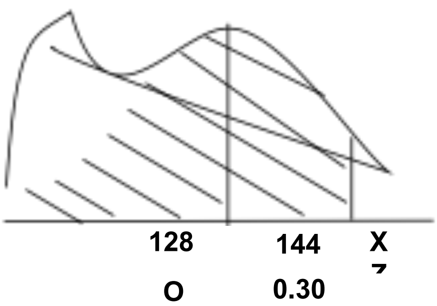
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad 1.34 = \frac{75 - \mu}{\sigma} \qquad 1.34\sigma = 75 - \mu \quad -(ii)$$



(i) में (ii) को घटाने पर

$$0.1\sigma = 40 - \mu$$
$$1.34\sigma = 75 - \mu$$
$$- \quad +$$
$$-1.24\sigma = -35$$

$$\sigma = \frac{-35}{-1.24} = 28.22$$



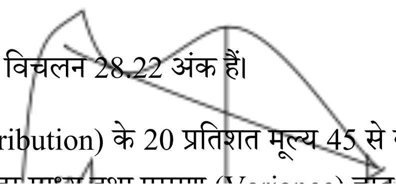
σ का मान (i) में रखने पर

0.1(28.22) = 40- μ

2.822- 40= - μ

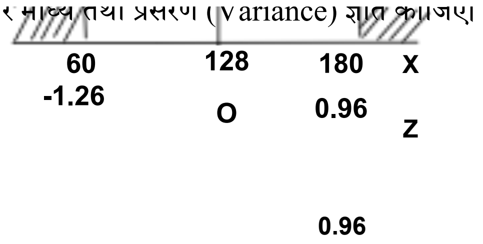
μ= 37.178

अत: औसत अंक 37.178 तथा प्रमाप विचलन 28.22 अंक हैं।



उदाहरण: एक प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) के 20 प्रतिशत मूल्य 45 से कम हैं तथा 15 प्रतिशत मूल्य 70 से अधिक ... (Variance) ज्ञात कीजिए।

15 प्रतिशत मूल्य 70 से अधिक बंटन का समान्तर माध्य तथा प्रसरण (Variance) ज्ञात कीजिए।



हल:

$\sigma^2 = ?$ $\mu = ?$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

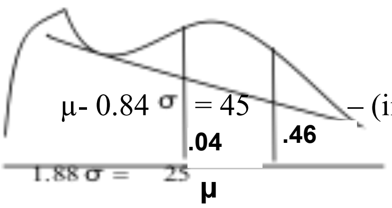
Z = - ? Z = + ?

Z (P=0.35) = + 1.04

Z (P = 0.30) = - 0.84

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad +1.04 = \frac{70-\mu}{\sigma} \qquad \mu + 1.04\sigma = 70 \quad -(i)$$

$$-0.84 = \frac{45-\mu}{\sigma} \qquad \mu - 0.84\sigma = 45 \quad -(ii)$$



समीकरण (i) में से समीकरण (ii) को घटाने पर $1.88\sigma = 25$

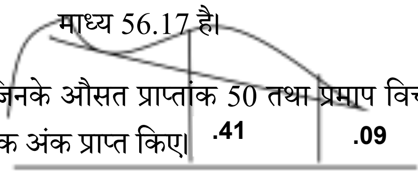
$\sigma \Rightarrow 13.30$

σ का मान समीकरण (i) में रखने पर $\mu + 13.83 = 70$

$\mu = 56.17$

अत: बंटन का प्रसरण (Variance) $\sigma^2 = (13.3)^2 = 176.89$

माध्य 56.17 है।



उदाहरण:- एक कक्षा में 75 छात्र हैं जिनके औसत प्राप्तांक 50 तथा प्रमाप विचलन 5 है। कितने विद्यार्थियों ने 60 से अधिक अंक प्राप्त किए।

हल:- दिया गया है, $\overline{X} = 50$ और $\sigma = 5$: हमें ऐसे विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात करनी है, जिनके 60 से अधिक प्राप्तांक आए हैं, अत: X = 60

$$Z = \frac{X-\overline{X}}{\sigma}, \quad Z = \frac{60-50}{5} = 2$$

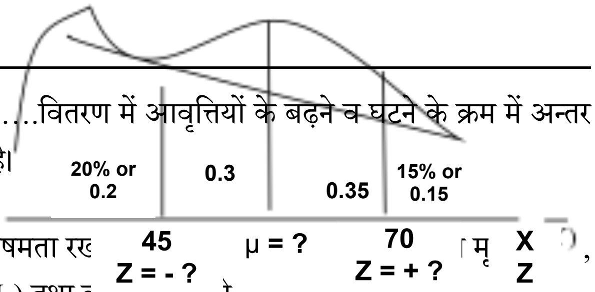
Z का प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल = 0.4772

60 से अधिक के लिए क्षेत्रफल = 0.5 - .4772 = 0.0228

अत: 60 से अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = NP = 0.228x75 = 1.71= 2

अत: 60 से अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 2

11. ……………..वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है।



12. धनात्मक विषमता रख … मृ … ,
मध्यिका (M_d) तथा ब … े ………………

13. यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता…………… होगी।

14. सामान्य वितरण सदैव …….. के आकार का होता है।

15. …………….का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है।

16. ……………..एक साँख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति पर प्रकाश डालती है।

17. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु ………… पर केन्द्रित होता है।

18. पृथुशीर्षत्व का माप ……………एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है।

19. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यिका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के …………….. में स्थित होते हैं।

20. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु………… रूप से विस्तृत होती है।

6.16 सारांश

प्रस्तुत इकाई में आप सामान्य वितरण वक्र की विशेषताएँ और उपयोगिताएँ, विषमता व पृथुशीर्षत्व के मान के परिकलन के बारे में अध्ययन किया। यहाँ पर इन सभी अवधारणाओं का संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution): इस प्रकार के वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है। यदि आवृत्ति वितरण का वक्र तैयार किया जाय तो वह सदैव घण्टी के आकार (Bell Shaped) का होता है, जो इसकी सामान्य स्थिति को प्रदर्शित करता है।

असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution): असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है। आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ती है अधिकतम बिन्दु पर पहुँचने के पश्चात उसी क्रम में नहीं घटती। ऐसे वितरण का वक्र घण्टी के आकार वाला व दायें या बायें झुकाव लिए हुए होता है।

धनात्मक विषमता (Positive Skewness) : यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में

धनात्मक विषमता होगी। धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य $(\overline{X})$, मध्यिका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है।

ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) :यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी।

विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जो किसी श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है। एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं।

विषमता गुणांक का परिकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से किया सकता है , जो इस प्रकार है:-

iiii. कार्ल पियर्सन का माप (Karl Pearson's Measure)
v. बाउले का माप (Bowley's Measure)
vi. केली का माप (Kelly's Measure)

पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक साँख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। ग्रीक भाषा में इस शब्द का अर्थ फुलावट (Bulginess) होता है। साँख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या नुकीलापन की मात्रा से है।

कार्ल पियर्सन ने 1905 में पृथुशीर्षत्व या कुकुदता के प्रकार के लिए निम्न तीन शब्दों का प्रयोग किया था:-

iiii. LEPTOKURTIC (लेप्टोकर्टिक): नुकीले शीर्ष वाला वक्र (Peaked Curve)
v. PLATYKURTIC (प्लेटीकर्टिक) : चपटे शीर्ष वाला वक्र (Flat-topped Curve)
vi. MESOKURTIC (मेसोकर्टिक) : सामान्य वक्र (Normal Curve)

पृथुशीर्षत्व का माप चतुर्थ एवं द्वितीय केन्द्रीय परिघातों (Moments) के आधार पर परिघात अनुपात (Moments Ratio) द्वारा ज्ञात किया जाता है।

प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution) एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है तथा यह वक्र प्रसामान्य बंटन के दो प्राचल (Parameters) माध्य (Mean) (μ) तथा प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) पर आधारित होता है।

प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ (Features of a Normal Curve)इस प्रकार हैं :

1. इस वक्र का एक ही शीर्ष बिन्दु होता है, अर्थात् यह एक बहुलकीय (Unimodal) वक्र है। इसका आकार घंटीनुमा (Bell Shaped) होता है।
2. यह एक सममित वक्र (Symmetrical curve) है।
3. एक प्रसामान्य वक्र में माध्य, मध्यिका एवं बहुलक बराबर तथा वक्र के मध्य में स्थित होते हैं।
4. प्रसामान्य वक्र की दोनों बाहु अपरिमित (Infinite) रूप से विस्तृत होती है।
5. इस वक्र के दो प्राचल होते हैं, समान्तर माध्य (μ) तथा प्रमाप विचलन (σ)।

6. समान्तर माध्य का दाया आर क ाहस्स का प्राताबम्ब बाया ाहस्सा हाता ह।

7. प्रसामान्य वक्र का माध्य ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक कोई भी संख्या हो सकती है।

8. प्रमाप विचलन, वक्र की चौड़ाई को निर्धारित करता है।

9. किसी भी सतत् प्रायिकता बंटन के वक्र का कुल क्षेत्रफल 1 होता है।

10. प्रसामान्य वक्र का उच्चतम बिन्दु माध्य पर केन्द्रित होता है।

प्रसामान्य वक्र या जिसे प्रसामान्य प्रसंभाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) भी कहा जाता है, के कुछ प्रमुख अनुप्रयोग निम्नांकित है:

1. प्रसामान्य वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दी गई सीमाओं (Limits) के भीतर पड़ने वाले केसेज के प्रतिशत का पता लगाया जाता है। यह प्रसामान्य वक्र की एक प्रमुख उपयोगिता है।
2. प्रसामान्य वितरण वक्र द्वारा प्रसामान्य वितरण में दिये गये केसेज के प्रतिशत के आधार पर उनकी सीमाओं का पता लगाया जाता है।
3. प्रसामान्य वक्र द्वारा किसी समस्या या परीक्षण के एकांश के सापेक्ष कठिनता स्तर (relative difficulty level) ज्ञात किया जा सकता है।
4. प्रसामान्य वक्र द्वारा दो वितरणों की अतिव्याप्ति (Overlapping) के रूप में तुलना किया जाता है।

6.17 शब्दावली

सममित अथवा सामान्य वितरण (Symmetrical or Normal Distribution): जब किसी वितरण में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ती हैं फिर एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होने के पश्चात् उसी क्रम से घटती है।

असममित वितरण अथवा विषम वितरण (Asymmetrical Distribution): असममित वितरण में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने के क्रम में अन्तर पाया जाता है।

विषमता (Skewness): एक वितरण को विषम कहा जाता है, जबकि उसमें सममितता (Symmetry) का अभाव हो, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर या दूसरी ओर ही मूल्य केन्द्रित हो जाते हैं।

धनात्मक विषमता (Positive Skewness) : यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर है तो उस वक्र में धनात्मक विषमता होगी। धनात्मक विषमता रखने वाले वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य $(\overline{X})$ मध्यिका (M_d) तथा बहुलक (Z) से अधिक होता है।

ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness): यदि वक्र का झुकाव दाहिनी ओर न होकर बायीं ओर अधिक हो तो विषमता ऋणात्मक होगी।

पृथुशीर्षत्व (Kurtosis): पृथुशीर्षत्व या कुकुदता एक साँख्यिकीय माप है, जो वक्र के शीर्ष की प्रकृति (Peak of a curve) पर प्रकाश डालती है। साँख्यिकी में पृथुशीर्षत्व से तात्पर्य एक आवृत्ति वक्र के बहुलक के क्षेत्र में चपटेपन या नुकीलापन की मात्रा से है।

प्रसामान्य/सामान्य बंटन या वितरण (Normal Distribution): यह एक सतत् प्रायिकता बंटन (Continuous Random Distribution) है। इसका प्रायिकता घनत्व फलन (Probability

Density Function) घंटीनुमा आकार (Bell Shaped) का वक्र (Curve) होता है।

6.18 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. 0 2. 1 3. Q.D. 4. 0.9544 5. 0.3989 6. प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ) 7. कम 8. अधिक 9. सामान्य (Mesokurtic) 10. 0 11. असममित 12. अधिक 13. ऋणात्मक 14. घण्टी 15. विषमता 16. पृथुशीर्षत्व या कुकुदता 17. माध्य 18. चतुर्थ 19. मध्य 20. अपरिमित (Infinite)

6.19 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.

2. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.

3. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.

4. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.

5. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.

6. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास

7. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन

8. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स

6.20 निबंधात्मक प्रश्न

1. सामान्य वितरण के अर्थ व विशेषताओं को स्पष्ट कीजिए।

2. सामान्य वितरण वक्र की उपयोगिताओं की व्याख्या कीजिए।

3. सामान्य वितरण वक्र पर आधारित समस्याओं को हल कर सकेंगे।

4. विषमता गुणांक से आप क्या समझते हैं? विषमता गुणांक के मान को परिकलित करने के सूत्रों को लिखिए।

5. पृथुशीर्षत्व से आप क्या समझते हैं? पृथुशीर्षत्व गुणांक के मान को परिकलित करने के सूत्रों को लिखिए।

6. 500 छात्रों को 10 समूहों में बांटा गया। यदि छात्रों की योग्यता सामान्य रूप से वितरित है तो प्रत्येक समूह में कितने छात्र होंगे। (उत्तर : 3, 14, 40, 80, 113, 80, 40, 14, 3)

7. यदि एक समूह जिसका कि माध्य 100 तथा मानक विचलन 15 में यह माना जाय कि बुद्धिलब्धि सामान्य रूप से वितरित है तो निम्न बुद्धिलब्धि वाले लोगों का अनुपात निकालिए : (अ) 135 से ऊपर (ब) 120 से ऊपर (स) 90 से नीचे (द) 75 व 125 के मध्य (उत्तर: (अ) .0099 (ब) .0918 (स) .02514 (द) .9050)

इकाई संख्या 7: अनुमानात्मक साँख्यिकी- क्रांतिक अनुपात, शून्य परिकल्पना का परीक्षण, सार्थकता परीक्षण, त्रुटियों के प्रकार, एक पुच्छीय तथा द्विपुच्छीय परीक्षण, टी – परीक्षण तथा एफ – परीक्षण (एनोवा) [Inferential Statistics - Critical Ratio, Testing the Null Hypothesis, Test of Significance, Types of Error, One –tailed test, Two-tailed test, t-test and F-test (ANOVA)]

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

7.2 उद्देश्य

7.3 अनुमानात्मक साँख्यिकी का अर्थ व प्रकार

7.4 प्राचलिक एवं अप्राचल साँख्यिकी में अंतर

7.5 शोध परिकल्पना तथा नल या निराकरणीय परिकल्पना

7.6 एक -पार्श्व परीक्षण तथा द्वि-पार्श्व परीक्षण

7.7 सार्थकता के स्तर

7.8 प्रथम प्रकार की त्रुटि व द्वितीय प्रकार की त्रुटि

7.9 परिकल्पना परीक्षण

7.10 दो स्वतन्त्र समूहों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण

7.10 दो समान्तर माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण
7.11 दो समान्तर माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण:- जब उनमें सहसंबंध गुणांक दिया हो
7.12 दो अनुपातों के अंतर की सार्थकता का परीक्षण
7.13 प्रतिदर्श समान्तर माध्य तथा सामूहिक समान्तर माध्य के अन्तर की सार्थकता का परीक्षण
7.14 प्रतिदर्श प्रमाप विचलन तथा सामूहिक प्रमाप विचलन (SD) के अन्तर का सार्थकता परीक्षण
7.15 प्रतिदर्श अनुपात तथा संयुक्त अनुपात के अन्तर का सार्थकता परीक्षण
7.16 स्वातंत्र्य कोटियाँ
7.17 स्टूडेण्ट t- परीक्षण
7.18 क्रांतिक अनुपात का मान
7.19 F- परीक्षण या प्रसरण विश्लेषण (एनोवा)
7.20 F बंटन की विशेषताएँ
7.21 F –परीक्षण के अनुप्रयोग
7.22 समग्र के माध्यों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण
7.23 मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन
7.24 सारांश
7.25 शब्दावली
7.26 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर
7.27 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री
7.28 निबंधात्मक प्रश्न

7.1 प्रस्तावना

साँख्यिकी वह विज्ञान है जो घटनाओं की व्याख्या, विवरण तथा तुलना के लिए संख्यात्मक तथ्यों का संकलन, वर्गीकरण तथा सारणीकरण करता है। यह वैज्ञानिक कार्यप्रणाली की एक शाखा है, जिसके द्वारा प्रयोगों तथा सर्वेक्षणों के आधार पर प्राप्त आँकड़ों का संकलन (Collection), वर्गीकरण (Classification), विवरण (Description) तथा विवेचन की जाती है। कार्य के आधार पर साँख्यिकी को दो भागोंं में वर्गीकृत किया जा सकता है- वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive statistics) व अनुमानात्मक साँख्यिकी (inferential statistics)।

वर्णनात्मक साँख्यिकी, संख्यात्मक तथ्यों का साधारण ढंग से वर्णन करता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापक (माध्य, माध्यिका और बहुलक), विचरणशीलता के विभिन्न मापक (प्रमाप विचलन, माध्य विचलन, चतुर्थांक विचलन व परास) और सहसंबंध गुणांक के विभिन्न मापक, वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive statistic) के उदाहरण है। ये सभी साँख्यिकीय मापक संख्यात्मक आँकड़ों का सामान्य ढंग से वर्णन करता है। इससे किसी प्रकार का कोई अनुमान (Inference) नहीं लगाया जा सकता है।

अनुमानात्मक साँख्यिकी (inferential statistics) हमें यह बतलाती है कि एक प्रतिदर्श (Sample) के प्राप्तांकों (Scores) के आधार पर मिले साँख्यिकी उस बड़े समग्र (Population)

का किस हद तक प्रतिनिधित्व करता है, जिससे कि वह प्रतिदर्श लिया गया था। अनुमानात्मक साँख्यिकी के बेहतर प्रयोग के लिए आपको क्रांतिक अनुपात, शून्य या निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण, सार्थकता परीक्षण, त्रुटियों के प्रकार (प्रथम व् द्वितीय), एक पार्श्वव (पुच्छीय) तथा द्वि पार्श्वव (पुच्छीय) परीक्षण इत्यादि आधारभूत अवधारणाओं को समझना आवश्यक है। प्रस्तुत इकाई में इन सभी अवधारणाओं को स्पष्ट किया गया है। साथ ही इस इकाई में प्राचलिक साँख्यिकी (अनुमानात्मक साँख्यिकी) टी – परीक्षण तथा एफ – परीक्षण (एनोवा) के परिकलन की विधियों पर भी चर्चा की गयी है।

7.2 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययनोपरांत आप-

- अनुमानात्मक साँख्यिकी के अर्थ को स्पष्ट कर पायेंगे।
- अनुमानात्मक साँख्यिकी की विशेषताओं की व्याख्या कर सकेंगे।
- अनुमानात्मक साँख्यिकी को वर्गीकृत कर सकेंगे।
- प्राचलिक साँख्यिकी व अप्राचलिक साँख्यिकी के मध्य अंतर स्पष्ट कर पायेंगे।
- एक पार्श्वव (पुच्छीय) तथा द्वि पार्श्वव (पुच्छीय) परीक्षण के मध्य अंतर स्पष्ट कर पायेंगे।
- निराकरणीय परिकल्पना के अर्थ को स्पष्ट कर पायेंगे।
- त्रुटियों के प्रकार (प्रथम व् द्वितीय) के मध्य अंतर स्पष्ट कर पायेंगे।
- निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण कर सकेंगे।
- टी – परीक्षण के मान का परिकलन कर सकेंगे।
- एफ – परीक्षण (एनोवा) के मान का परिकलन कर सकेंगे।

7.3 अनुमानात्मक साँख्यिकी का अर्थ व प्रकार (Meaning and types of Inferential Statistics):

साँख्यिकीय प्रक्रियाएँ जिसके द्वारा प्रतिदर्श आँकड़े के आधार पर समग्र के गुणों के बारे में अनुमान लगाया जाता है, अनुमानात्मक साँख्यिकी या प्रतिचयन साँख्यिकी कहा जाता है। अनुमानात्मक साँख्यिकी को प्रतिचयन साँख्यिकी या आगमनात्मक (inductive statistics) भी कहा जाता है। इसका प्रयोग शोधों से प्राप्त आँकड़ों से अनुमान लगाने तथा इन अनुसंधानों के दौरान हुई त्रुटियों की जानकारी करने के लिए होता है। अनुमानात्मक साँख्यिकी को दो भागों में बाँटा जा सकता है। साँख्यिकी में कभी-कभी समग्र (Population) के बारे में कुछ पूर्वकल्पनाएँ करनी पड़ती है। इस पूर्वकल्पनाओं (assumptions) के आधार पर अनुमानात्मक साँख्यिकी को दो भागों में वर्गीकृत किया गया है:-

i. प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics)
ii. अप्राचलिक साँख्यिकी (Nonparametric Statistics)

प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics) वह साँख्यिकी है जो समग्र

प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics) वह साँख्यिकी है, जो समग्र (Population) जिससे कि प्रतिदर्श (Sample) लिया जाता है, के बारे में कुछ पूर्वकल्पनाओं या शर्तों (Conditions) पर आधारित होता है। ये शर्त निम्नवत हैं -

i. प्रतिदर्श (Sample) का चयन सामान्य रूप से वितरित समग्र (Normally distributed population) से होना चाहिए।

ii. समग्र से प्रतिदर्श का चयन यादृच्छिक प्रतिदर्श विधि (Method of random sampling) से होना चाहिए। अर्थात् प्रेक्षण (observation) अवश्य ही स्वतंत्र तथा निष्पक्ष होना चाहिए। इसमें शोधकर्ता या प्रेक्षक के पक्षपात या पूर्वाग्रह को सम्मिलित नहीं करना चाहिए।

iii. शोध में सम्मिलित चरों का मापन अन्तराल मापनी (interval scale) पर होना चाहिए ताकि उनका गणितीय परिकलन (arithmetical calculation) जैसे- जोड़, घटाना, गुणा, माध्य निकालना आदि किया जा सके।

सीगेल (Siegel, 1956) के अनुसार:- "चूंकि ये सभी शर्तें ऐसी हैं जिनकी साधारणत: जाँच नहीं की जाती है, यह मान ली जाती है कि शर्तें मौजूद हैं। प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics) के परिणाम की सार्थकता उपयुक्त शर्तों की सत्यता पर आधारित होती है। टी –परीक्षण (t- test) एफ- परीक्षण (F-test) (ANOVA) तथा कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक प्राचलिक साँख्यिकी के उदाहरण हैं।

अप्राचल साँख्यिकी (Nonparametric Statistics) उस समग्र के बारे में जिससे कि प्रतिदर्श निकाला जाता है, कोई खास शर्त नहीं रखती है। यह समग्र के वितरण के बारे में कोई पूर्वकल्पना नहीं करती इसलिए इसे वितरण मुक्त साँख्यिकी (distribution- free statistics) भी कहते हैं। अप्राचल साँख्यिकी के प्रयोग हेतु कुछ शर्तों का पालन आवश्यक है, जो निम्नवत हैं -

i. प्रेक्षण स्वतंत्र एवं निष्पक्ष हो।

ii. मापित चर में निरन्तरता (Continuity) हो।

iii. चरों का मापन क्रमित (ordinal) या नामित (Nominal) पैमाने पर हो।

काई वर्ग परीक्षण (X_2 test), मान- विटनी यू परीक्षण (Mann - Whitney U test), स्पीयरमैन कोटि अन्तर विधि (spearman rank- difference method), केण्डाल कोटि अन्तर विधि, (Kendall's rank difference method), माध्यिका परीक्षण (Median test), क्रूसकाल- वालिस परीक्षण (Kruskal Wallis test), फ्रीडमैन परीक्षण (Freidman test) और विलकोक्सोन चिहिन्त क्रम परीक्षण (Wilcoxon signed rank test) इत्यादि अप्राचल साँख्यिकी के कुछ प्रमुख उदाहरण हैं।

साधारणतया प्राचलिक एवं अप्राचल सार्थकता परीक्षण जिसका प्रयोग शैक्षिक एवं मनोवैज्ञानिक शोधों में किया जाता है, उनका संक्षिप्त विवरण अग्र सारणी में दिया गया है:-

परीक्षण का नाम	**साँख्यिकीय परीक्षण**	**स्वतंत्रता के अंश**	**प्राचलिक (P) व अप्राचल (NP) साँख्यिकी**	**उद्देश्य**	**स्वतंत्र चर**	**आश्रित चर**
स्वतंत्र न्यादर्शों के लिए t- परीक्षण	t-test	$n_1 + n_2 - 2$	P	दो स्वतंत्र समूहों के माध्यों के अन्तरों का	नामित ((Nominal	अन्तराल या अनुपाती ((Ratio

				अन्तरों का परीक्षण		
आश्रित न्यादर्शों के लिए t-परीक्षण	t-test	N -1	P	दो आश्रित समूहों के माध्यों के अन्तरों का परीक्षण	-तदैव-	-तदैव-
एनोवा Analysis of) Variance-(ANOVA	F	SS_B= वर्गो की संख्या-1 SS_W= कुल प्रतिभागियों की संख्या-वर्गो की संख्या-1	P	तीन या तीन से अधिक स्वतंत्र समूहों के माध्यों के अन्तरों का परीक्षण	-तदैव-	-तदैव-
कार्ल पियर्सन सहसंबंध	r	N – 2	P	सहसंबंध की जाँच	अन्तराल या अनुपाती	तदैव
काई-वर्ग परीक्षण X^2 test	X^2	(r-1) (c-1)	NP	दो या दो से अधिक समूहों के मध्य अनुपात-अंतरों का परीक्षण	नामित	नामित
माध्यिका परीक्षण	X^2	(r-1) (c-1)	NP	दो स्वतंत्र समूहों के माध्यिकाओं के अन्तरों का परीक्षण	नामित	क्रमित
मान-विटनी यू परीक्षण	U	N -1	N P	दो स्वतंत्र समूहों के क्रमान्तर का परीक्षण	नामित	क्रमित
विलकोक्सोन चिन्हित क्रम परीक्षण	Z	N -2	NP	दो संबंधित समूहों के क्रमान्तर का परीक्षण	नामित	क्रमित
क्रूसकाल-वालिस परीक्षण	H	वर्गों की संख्या-1	NP	तीन या तीन से अधिक स्वतंत्र समूहों के क्रमान्तर का परीक्षण	नामित	क्रमित
फ्रीडमैन परीक्षण	X	वर्गों की संख्या-1	NP	तीन या तीन से अधिक संबंधित समूहों के क्रमान्तर का परीक्षण	नामित	क्रमित

स्पीयरमैन रो Speraman's Rho	P	N -2	NP	सहसंबंध की जाँच	क्रमित	क्रमित

7.4 प्राचलिक एवं अप्राचल साँख्यिकी में अंतर (Difference between Parametric and Nonparametric Statistics):

इस प्रकार प्राचलिक एवं अप्राचल साँख्यिकी में बहुत भिन्नताएं पायी जाती हैं। इन भिन्नताओं को समझने के लिए आपके समक्ष तुलनात्मक तालिका प्रस्तुत किया गया है -

अप्राचल साँख्यिकी (Nonparametric Statistics)	**प्राचलिक साँख्यिकी)Parametric Statistics)**
अप्राचल साँख्यिकी की व्युत्पति .1 (derivation) प्राचलिक साँख्यिकी की व्युत्पति की तुलना में आसान है।	यह अपेक्षाकृत कठिन है।
अप्राचल साँख्यिकी में गणितीय .2 परिकलन के रूप में श्रेणीकरण (ranking), गिनती (Counting), जोड़ (Addition), घटाव (Substraction) आदि का प्रयोग होता है।	प्राचलिक साँख्यिकी में इससे अधिक उच्च स्तर के गणितीय परिकलन की जरूरत पड़ती है।
अप्राचल साँख्यिकी को प्राचलिक .3 साँख्यिकी की अपेक्षा व्यवहार में लाना ज्यादा आसान है।	यह अपेक्षाकृत जटिल है।
जब प्रतिदर्श का आकार छोटा हो तो .4 अप्राचल साँख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।	जब प्रतिदर्श का आकार बड़ा हो तो प्राचलिक साँख्यिकी का प्रयोग किया जाता है।
इसकी शर्तें कम सख्त होती है। .5	इसकी शर्तें अपेक्षाकृत ज्यादा सख्त होती है।
अप्राचल साँख्यिकी के प्रयोग में नामित .6 तथा क्रमित आँकड़े की जरूरत होती है।	प्राचलिक साँख्यिकी के प्रयोग में अन्तराल मापनी तथा आनुपातिक मापनी पर प्राप्त आँकड़ों की आवश्यकता होती है।
अप्राचल साँख्यिकी के प्रयोग में किसी .7 शोधकर्ता द्वारा अतिक्रमण करने की संभावना कम से कम होती है।	प्राचलिक साँख्यिकी की शर्तें सख्त होने से अतिक्रमण की संभावना ज्यादा होती है।
व्यावहारिक दृष्टिकोण से अप्राचल .8 साँख्यिकी ज्यादा उपयुक्त है।	सैद्धान्तिक दृष्टिकोण से प्राचलिक साँख्यिकी ज्यादा सशक्त है।

7.5 शोध परिकल्पना तथा नल या निराकरणीय परिकल्पना (Research Hypothesis and Null Hypothesis):-

वैज्ञानिक अनुसंधान में परिकल्पना का स्थान बहुत ही महत्वपूर्ण है। शैक्षणिक शोध तथा मनोवैज्ञानिक शोध में शोध समस्या के चयन के बाद शोधकर्ता परिकल्पना का प्रतिपादन करता है। परिकल्पना का प्रतिपादन किसी भी शोध समस्या का एक अस्थायी समाधान (Tentative Solution) एक जांचनीय प्रस्ताव (testable proposition) के रूप में करता है। इसी जांचनीय प्रस्ताव को परिकल्पना की संज्ञा दी जाती है। परिकल्पना दो या दो से अधिक चरों के बीच संभावित संबंधों के बारे में बनाये गये जांचनीय कथन को कहते हैं।

शोध परिकल्पना से तात्पर्य वैसी परिकल्पना से होता है जो किसी घटना तथ्य के लिए बनाये गये विशिष्ट सिद्धान्त (Specific Theory) से निकाले गये अनुमिति (deductions) पर आधारित होती है। शोध समस्या के समाधान के लिए एक अस्थायी तौर पर हम एक प्रस्ताव तैयार कर लेते हैं, जिसे शोध परिकल्पना की संज्ञा दी जाती है। उदाहरण के लिए "दण्ड देने से अधिगम की प्रक्रिया धीमी गति से होती है " यह एक जांचनीय प्रस्ताव है, जो शोध परिकल्पना का एक उदाहरण है।

शून्य या निराकरणीय या नल परिकल्पना वह परिकल्पना है जिसके द्वारा हम चरों के बीच कोई अन्तर नहीं होने के संबंध का उल्लेख करते हैं। शोधकर्ता जब कोई शोध परिकल्पना बनाता है तो साथ ही साथ ठीक उसके विपरीत ढंग से नल परिकल्पना भी बना लेता है ताकि शोध के परिणाम द्वारा नल परिकल्पना अस्वीकृत हो जाय। उपर्युक्त उदाहरण के विपरीत यदि हम यह कहते हैं कि "दण्ड देने से अधिगम की प्रक्रिया पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है'' तो यह नल परिकल्पना का उदाहरण होगा। यदि शोध के परिणाम द्वारा यह अस्वीकृत हो जाता है तो स्वत: उसका विपरीत (अर्थात् शोध परिकल्पना) को यर्थाथ मान लिया जाता है।

नल परिकल्पना को दो प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है- दिशात्मक परिकल्पना (Directional Hypothesis) तथा अदिशात्मक परिकल्पना (No directional Hypothesis)। उदाहरणस्वरूप मान लिया जाय कि कोर्इ शोधकर्ता लड़के और लड़कियों के दो समूहों में बुद्धि में अन्तर का अध्ययन करना चाहता है, जिसके लिए वह शोध परिकल्पना इस तरह बनाता है- लड़के, लड़कियों की अपेक्षा बुद्धि में श्रेष्ठ है। इस शोध परिकल्पना को नल परिकल्पना के रूप में दो तरह से अभिव्यक्त किया जा सकता है:-

i. लड़के व लड़कियों की बुद्धि में कोई अन्तर नहीं है-

अदिशात्मक परिकल्पना (Non directional Hypothesis)

ii. लड़के, लड़कियों की अपेक्षा बुद्धि में श्रेष्ठ है –

दिशात्मक परिकल्पना (Directional Hypothesis)

पहली परिकल्पना में लड़के व लड़कियो के बुद्धि के अंतर में कोई दिशा का उल्लेख नहीं है इसलिए इस प्रकार के परिकल्पना को अदिशात्मक परिकल्पना की संज्ञा दी जाती है। दूसरी परिकल्पना में लड़के व लड़कियों के बुद्धि में अंतर को दिशात्मक रूप से परिलक्षित किया गया है, उनके मध्य अंतर में एक दिशा पर बल डाला गया है। अत: यह दिशात्मक परिकल्पना का उदाहरण है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

1. 'लड़के व लड़कियों की बुद्धि में कोई अन्तर नहीं है' .... परिकल्पना (Hypothesis) का उदाहरण है।
2. ……………………वह परिकल्पना है जिसके द्वारा हम चरों के बीच कोई अन्तर नहीं

होने के संबंध का उल्लेख करते हैं।

3. …………………सॉँख्यिकी में अधिक उच्च स्तर के गणितीय परिकलन की जरूरत पड़ती है।
4. ………………सॉँख्यिकी के प्रयोग में नामित तथा क्रमित आँकड़े की जरूरत होती है।
5. ……………..सॉँख्यिकी के प्रयोग में अन्तराल मापनी तथा आनुपातिक मापनी पर प्राप्त आँकड़ों की आवश्यकता होती है।

7.6 एक पार्श्व तथा द्विपार्श्व परीक्षण (One- tailed and Two-tailed Tests):

परिकल्पना परीक्षण में एक पार्श्व परीक्षण तथा द्विपार्श्व परीक्षण की भूमिका महत्वपूर्ण है। सॉँख्यिकीय विश्लेषण में इन परीक्षणों के स्वरूप को जानना आवश्यक होता है। जब शोधकर्ता नल परिकल्पना (null hypothesis) का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच कोई अन्तर नहीं है अर्थात् वह नल परिकल्पना की अभिव्यक्ति, अदिशात्मक रूप में करता है तो इसे द्वि-पार्श्व परीक्षण (Two- tailed test) कहा जाता है। इसके विपरीत जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता चलता है तो उसे एक पार्श्व परीक्षण (One- tailed test) कहा जाता है। उदाहरणस्वरूप यदि शोधकर्ता यह नल परिकल्पना (hypothesis) बनाता है कि कला स्नातक के छात्रों एवं छात्राओं के माध्य उपलब्धि प्राप्तांकों (Mean achievement scores) में कोई अन्तर नहीं है। स्पष्टत: यहाँ शोध परिकल्पना होगा कि इन दोनों समूहों के माध्य उपलब्धि प्राप्तांकों में अन्तर है। उपर्युक्त परिकल्पना के परीक्षण के लिए द्विपार्श्व परीक्षण का प्रयोग वांछनीय है, क्योंकि माध्यों का अन्तर धनात्मक दिशा ((positive direction) तथा ऋणात्मक दिशा (negative direction) दोनों में ही होने की सम्भावना है। इस दशा में यह प्रसामान्य वितरण (normal distribution) वक्र के दोनों छोरों (दायीं छोर या धनात्मक दिशा और बाँई छोर या ऋणात्मक दिशा) को एक साथ मिला देते हैं जिसे क्रान्तिक क्षेत्र (critical region) या अस्वीकृति का क्षेत्र (region of rejection) कहा जाता है। निम्न रेखाचित्र में अस्वीकृति के 5 प्रतिशत क्षेत्र अर्थात् 0.05 सार्थकता स्तर को दर्शाया गया है, जिसे प्रसामान्य वक्र (normal curve) के दोनों छोरों पर समान रूप से विभाजित कर दिया गया है। इस प्रकार 2.5 प्रतिशत क्षेत्र प्रसामान्य वितरण (normal distribution) वक्र के दायीं ओर तथा 2.5 प्रतिशत बायीं ओर का क्षेत्र होगा। 5 प्रतिशत का Z प्राप्तांक अर्थात् सिग्मा प्राप्तांक जिसे प्रसामान्य वक्र के X अक्ष पर दिखलाया गया है ± 1.96 है।

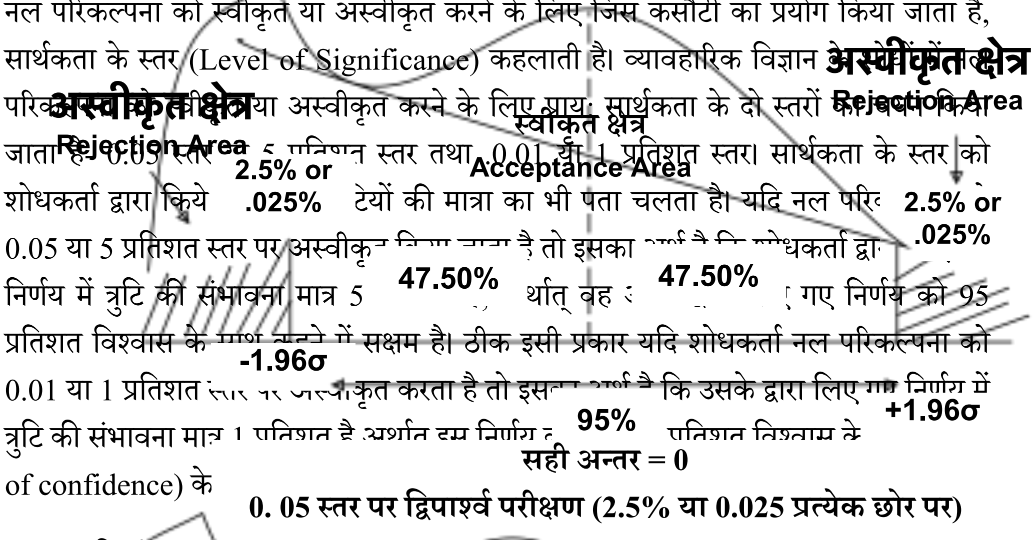
यदि हम 1% सार्थकता स्तर की बात करते हैं तो वक्र के दोनों छोरों पर 0.5% (या .005) का अस्वीकृत क्षेत्र होगा। इस क्षेत्र का Z प्राप्तांक ± 2.58 होता है। इसको निम्न रेखाचित्र के माध्यम से दर्शाया जा सकता है।

अर्थात् द्विपार्श्व परीक्षण में न्यादर्श वितरण के (sampling distribution) के दोनों छोरों (+Ve तथा -Ve) को ध्यान में रखकर माध्य अन्तरों (Mean differences) से संबंधित निराकरणीय परिकल्पना या शोध परिकल्पना की जाँच की जाती है, क्योंकि इसमें अन्तर धनात्मक या ऋणात्मक कुछ भी दिशा ज्ञात नहीं होती है।

द्विपार्श्व परीक्षण के विपरीत यदि निराकरणीय परिकल्पना को परिवर्तित कर उसे दिशा के संदर्भ में बात किया जाय चाहे वह धनात्मक हो या ऋणात्मक, एक पार्श्व परीक्षण का उदाहरण होगा। उदाहरणस्वरूप कला स्नातक के छात्रों की शैक्षिक उपलब्धि उस कक्षा के छात्राओं की तुलना में अधिक है। इस तरह की परिकल्पना, स्पष्ट रूप से अन्तर की दिशा की ओर इंगित करता है। इस तरह का उदाहरण एक पार्श्व परीक्षण का उदाहरण होगा। एक पार्श्व परीक्षण के लिए अस्वीकृत (rejection) का 5 प्रतिशत क्षेत्र प्रसामान्य वक्र का ऊपरी छोर या निचली छोर पर ही होगा। इस स्थिति में 0.05 स्तर की प्रसम्भाव्यिता (Probability) P/2 जो 0.05/2 या 0.10 होती है या (0.05 +0.05) होगी। उसी प्रकार से इस परीक्षण के अस्वीकृति का 1% क्षेत्र प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) का ऊपरी छोर या निचली छोर पर ही होगा। इस स्थिति में 0.01 स्तर की प्रसम्भाव्यिता (Probability) P/2 जो वस्तुत: 0.02 होती है (0.01+0.01=0.02) होगी।

7.7 सार्थकता के स्तर (Level of Significance):

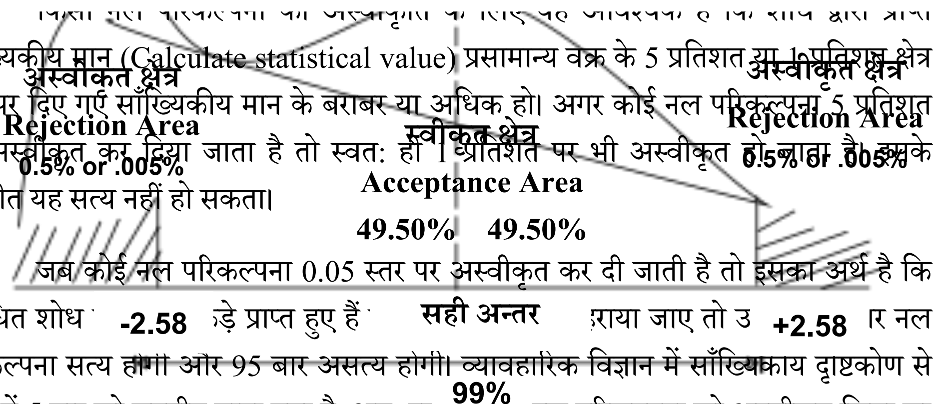
किसी भी शोध में नल परिकल्पना का विकास उसे अस्वीकृत करने के दृष्टिकोण से ही किया जाता है ताकि उसके विपरीत शोध परिकल्पना (research hypothesis) को अंतिम रूप से स्वीकृत किया जा सके। नल परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति के लिए कुछ विशेष कसौटियों का इस्तेमाल किया जाता है। ये विशेष कसौटियाँ सार्थकता के स्तर के नाम से जानी जाती है। अर्थात् नल परिकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए जिस कसौटी का प्रयोग किया जाता है, सार्थकता के स्तर (Level of Significance) कहलाती है। व्यावहारिक विज्ञान ... परिक... या अस्वीकृत करने के लिए प्राय: सार्थकता के दो स्तरों का ... किया जाता है। 0.05 स्तर ... प्रतिशत स्तर तथा 0.01 या 1 प्रतिशत स्तर। सार्थकता के स्तर को शोधकर्ता द्वारा किये ... टियों की मात्रा का भी पता चलता है। यदि नल परि... 0.05 या 5 प्रतिशत स्तर पर अस्वीकृ... है तो इसका ... शोधकर्ता द्वा... निर्णय में त्रुटि की संभावना मात्र 5 ... र्थात् वह ... गए निर्णय को 95 प्रतिशत विश्वास के ... में सक्षम है। ठीक इसी प्रकार यदि शोधकर्ता नल परिकल्पना को 0.01 या 1 प्रतिशत ... कृत करता है तो इस... कि उसके द्वारा लिए ... निर्णय में त्रुटि की संभावना मात्र 1 प्रतिशत है अर्थात इस निर्णय ... प्रतिशत विश्वास के ... of confidence) के



0. 05 स्तर पर द्विपार्श्व परीक्षण (2.5% या 0.025 प्रत्येक छोर पर)

किसी नल परिकल्पना को अस्वीकृति के लिए यह आवश्यक है कि शोध द्वारा प्राप्त

साँख्यिकीय मान (Calculate statistical value) प्रसामान्य वक्र के 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत क्षेत्र क्षेत्र पर दिए गए साँख्यिकीय मान के बराबर या अधिक हो। अगर कोई नल परिकल्पना 5 प्रतिशत पर अस्वीकृत कर दिया जाता है तो स्वत: ही 1 प्रतिशत पर भी अस्वीकृत हो जाता है। इसके विपरीत यह सत्य नहीं हो सकता।



0. 01 स्तर पर द्विपार्श्व परीक्षण (0.5% या 0.005 प्रत्येक छोर पर)

जब कोई नल परिकल्पना 0.05 स्तर पर अस्वीकृत कर दी जाती है तो इसका अर्थ है कि संबंधित शोध ... ड़े प्राप्त हुए हैं ... राया जाए तो उ ... र नल परिकल्पना सत्य होगी और 95 बार असत्य होगी। व्यावहारिक विज्ञान में साँख्यिकीय दृष्टकोण से 100 में 5 बार को सहनीय माना गया है, अत: इस ... नल परिकल्पना को अस्वीकृत किया जा सकता है। 0.0 ... है। जब कोई नल परिकल्पना 0.01 स्तर पर अस्वीकृत कर दी जाती है तो उसका अर्थ है कि संबंधित शोध जिनसे आँकड़े प्राप्त हुए हैं, यदि 100 बार दोहराया जाए तो उसमें से 1 बार नल परिकल्पना सत्य होगी और 99 बार असत्य होगी। 100 बार में से 1 बार सही होने से शोधकर्ता इसे और अधिक विश्वास व सक्षमता के साथ अस्वीकृत करता है। सार्थकता के दोनों स्तरों (0.01 व 0.05) में किसी एक भी स्तर पर नल परिकल्पना के सत्य होने पर भी अस्वीकृत किया जाता है तो इस तरह के त्रुटि को प्रथम प्रकार की त्रुटि (Type- I error) कही जाती है। 0.01 स्तर पर प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा 0.05 स्तर पर के प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा से कम होती है, इसलिए 0.01 का सार्थकता स्तर 0.05 सार्थकता स्तर की अपेक्षा ज्यादा विश्वसनीय होता है।

7.8 प्रथम प्रकार की त्रुटि व द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Type- I Error and Type-II Error):

किसी अनुसंधान से संबंधित परिकल्पना परीक्षण करते समय दो प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं। किसी भी निर्णय पर पहुँचते समय दो प्रकार की गलती की संभावना रहती है। इसको एक उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है। माना कि एक न्यायाधीश द्वारा व्यक्ति जिस पर खून करने का आरोप है निर्णय देते समय दो प्रकार की त्रुटि या गलती की जा सकती है- यदि उस व्यक्ति द्वारा खून किया गया हो तो उसे मौत की सजा सुनाने के बजाय उसे छोड़ दिया जाय अथवा यदि उस व्यक्ति द्वारा खून नहीं किया गया हो तथा उसे मौत की सजा सुना दी जाय, दोनों स्थितियों में गलत निर्णय हुआ है। सही निर्णय तभी माना जायेगा जबकि खून करने पर सजा मिले तथा झूठा आरोप होने पर छोड़ दिया जाय। खून करने पर पर्याप्त साक्ष्य के अभाव में छोड़ देना प्रथम प्रकार की त्रुटि या जिसे अल्फा-त्रुटि (α *Error*) तथा खून नहीं करने पर मौत की सजा सुना देना द्वितीय प्रकार की त्रुटि अथवा बीटा-त्रुटि (β *Error*) है। दूसरे शब्दों में प्रथम प्रकार की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है जब ऐसी शून्य परिकल्पना (H_0) को अस्वीकार (reject) कर दिया जाता है जो वास्तव में सही है। अर्थात् सत्य शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति ही प्रथम प्रकार की त्रुटि है। द्वितीय प्रकार की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है, जबकि गलत शून्य परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है। अर्थात् गलत शून्य परिकल्पना की स्वीकृति ही द्वितीय प्रकार की त्रुटि है। दोनों ही त्रुटियाँ अनुचित हैं।

α = प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता β = द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता

	वास्तव में शून्य परिकल्पना सत्य है।	वास्तव में शून्य परिकल्पना असत्य है।
शून्य परिकल्पना स्वीकृति की जाती है	सही निर्णय	β त्रुटि (द्वितीय प्रकार की त्रुटि)

शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है	α त्रुटि (प्रथम प्रकार की त्रुटि)	सही निर्णय

परिकल्पना परीक्षण में त्रुटियों को पूरी तरह समाप्त नहीं किया जा सकता। परिकल्पना परीक्षण करते समय अधिकतर α त्रुटि को कम करने का प्रयास किया जाता है, जबकि β त्रुटि पर नियंत्रण नहीं रखा जाता। α त्रुटि ही सार्थकता स्तर कहलाती है। इसे कभी-कभी बहुत कम कर दिया जाता है। इस स्थिति में सत्य शून्य परिकल्पना तो स्वीकृति हो जाती है, लेकिन इसके कारण असत्य शून्य परिकल्पना के स्वीकृत होने की प्रायिकता भी बढ़ जाती है। β का परिकलन सामान्य क्रम में नहीं किया जाता, लेकिन यह समझना आवश्यक है कि सार्थकता स्तर α को बहुत कम करना ठीक नहीं है। अत: 1 प्रतिशत के स्थान पर सामान्यतया 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर रखना ज्यादा अच्छा है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

6. ……………….की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है जब ऐसी शून्य परिकल्पना (H_0) को अस्वीकार (reject) कर दिया जाता है जो वास्तव में सही है।
7. …………………की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है, जबकि गलत शून्य परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है।
8. 0.01 स्तर पर प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा 0.05 स्तर पर के प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा से ………………..होती है।
9. जब नल परिकल्पना की अभिव्यक्ति, अदिशात्मक रूप में करता है तो इसे ………………परीक्षण (test) कहा जाता है।
10. जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता चलता है तो उसे ....परीक्षण (test) कहा जाता है।

7.9 परिकल्पना परीक्षण (Hypothesis Testing) :

परिकल्पना परीक्षण को सार्थकता परीक्षण की संज्ञा भी दी जाती है। कभी-कभी प्रतिदर्शज या साँख्यिकी (Statistics) के आधार पर प्राचल (Parameters) को ज्ञात नहीं करना पड़ता, बल्कि प्राचल का दावा किया जाता है। उस दावे को परिकल्पना परीक्षण के माध्यम से या तो स्वीकृत किया जाता है अथवा अस्वीकृत। जैसा कि पूर्व में बताया गया है कि शून्य परिकल्पना (H_0) में प्राचल को स्वीकृत किया जाता है, जबकि वैकल्पिक परिकल्पना (H_1) में प्राचल को अस्वीकृत किया जाता है। सार्थकता परीक्षण करते समय उचित परिकल्पना तथा सार्थकता स्तर का निर्धारण आवश्यक है अन्यथा परिणाम गलत होने की संभावना रहती है। प्रतिचयन सिद्धान्त के आधार पर अवलोकित (observed) व प्रत्याशित आवृतियों (expected frequency) में अंतर की सार्थकता जाँच की सामान्य प्रक्रिया निम्न प्रकार है:-

i. **समस्या को प्रस्तुत करना (Presentation of the Problem):-** सर्वप्रथम अनुसंधान के उद्देश्य को स्पष्ट कर लेना चाहिए, अर्थात् किस संबंध में अध्ययन करना है और

किससे तुलना करना है। इस प्रकार विश्लेषणकर्ता के द्वारा समस्या को प्रस्तुत करना सर्वोपरि कार्य है।

ii. **शून्य परिकल्पना का निर्धारण (Setting up a Null Hypothesis):-** शून्य परिकल्पना (H_0) में दिए गये प्राचल के दावे को सही मानते हैं, जबकि वैकल्पिक परिकल्पना (H_1) में प्राचल के दावे को गलत मानते हैं। दूसरे शब्दों में इस प्रक्रिया में यह परिकल्पना की जाती है कि न्यादर्श व समग्र के विभिन्न साँख्यिकी मापों में एक निश्चित सीमा तक संबंध है अर्थात् प्रतिदर्शज या साँख्यिकी (Statistics) से प्राचल (Parameters) के अन्तर की सार्थकता की जाँच करने से पूर्व यह मान लिया जाता हे कि प्रतिदर्शज व प्राचल में कोई सार्थक अन्तर नहीं है और जो थोड़ा सा अन्तर है वह प्रतिचयन (sampling) उच्चावचनों (fluctuations) के कारण है।

iii. **सार्थकता स्तर का चुनाव (Selection of the level of Significance):-** प्रतिदर्शज व प्राचल के संबंध की जाँच करने के लिए इस स्तर का पूर्व में ही निर्धारण कर लिया जाता है, जिसके आधार पर परिकल्पना की मान्यता को स्वीकार या अस्वीकार करना हो। दूसरे शब्दों में प्रतिदर्श व समग्र के विभिन्न साँख्यिकी मापों को किस स्तर तक स्वीकार करना है। इस बात का पूर्व निर्धारण करना ही सार्थकता स्तर का चुनाव कहलाना है।

प्रसामान्य वक्र के आधार पर विभिन्न सार्थकता स्तरों α के लिए Z (Standard Normal Variate) के मान निम्नलिखित है:-

सार्थकता स्तर α	**10% या 0.1**	**5% या 0.05**	**2% या 0.02**	**1% या 0.01**
बायाँ पक्ष परीक्षण Z	1.28-	1.65-	2.06 -	2.33 -
दायाँ पक्ष परीक्षण Z	1.28 +	1.65 +	2.06 +	2.33 +
दोनों पक्ष का परीक्षण Z	1.65 ±	1.96 ±	2.33 ±	2.58 ±

iiii. **प्रमाप त्रुटि का परिकलन (Computation of Standard Error):-** सार्थकता स्तर के निर्धारण करने के बाद निदर्शन के विभिन्न मापों की प्रमाप त्रुटि की गणना के लिए अलग-अलग सूत्र हैं जिनका विस्तृत विवरण पिछली इकाई में किया जा चुका है।

v. **क्रांतिक अनुपात की गणना (Calculation of Critical Ratio):-** प्राचल व प्रतिदर्शज के अन्तर की जाँच करने के लिए क्रांतिक अनुपात की गणना की जाती है,जिसके लिये प्राचल व प्रतिदर्शज के अन्तर में संबंधित प्रमाप त्रुटि का भाग दे दिया जाता है।

vi. **निर्वचन (Interpretation):-** अन्तर की सार्थकता अनुपात की गणना करने के बाद पूर्व सार्थकता स्तर पर Z के क्रान्तिक मान (Critical Value of Z) से सार्थकता अनुपात की तुलना की जाती है। यदि यह सार्थकता अनुपात Z के क्रान्तिक मान की सीमाओं में होता है, तो अन्तर अर्थहीन माना जाता है एवं शून्य परिकल्पना स्वीकृत कर ली जाती है। यदि सार्थकता अनुपात Z के क्रान्तिक मान की सीमाओं से बाहर हो जाये तो अन्तर सार्थक माना जाता है तथा शून्य परिकल्पना (H_0) को अस्वीकृत करके वैकल्पिक परिकल्पना (H_1) को स्वीकृत कर लिया जाता है। इस स्थिति में ऐसा भी माना जा सकता है कि निदर्शन यादृच्छिक आधार पर नहीं किया गया था, क्योंकि अन्तर केवल प्रतिचयन उच्चावचनों के अतिरिक्त अन्य कारणों से भी है। ऐसी स्थिति

अन्तर केवल प्रतिचयन उच्चावचनों के अतिरिक्त अन्य कारणों से भी है। ऐसी स्थिति में शून्य परिकल्पना अस्वीकृत कर दी जाती है एवं उसके स्थान पर वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकार कर ली जाती है। दूसरे शब्दों में शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति का अर्थ प्राचल के दावे की अस्वीकृति है।

उदाहरण:- (a)100 संख्या वाले एक न्यादर्श में माध्य 3.24 cm है। क्या 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर उसे एक ऐसे समग्र का न्यादर्श माना जा सकता है, जिसका माध्य 2.74 cm है तथा प्रमाप विचलन 2.5 cm है तथा प्रमाप विचलन 2.5 cm है। (A sample of size 100 is found to have mean of 3.24 cms. Could it be regarded as a sample from a large population whose mean is 2.74 cms and standard deviation is 2.5 cms at 5% level of significance?)

(b) यदि आप 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर परीक्षण करें तो क्या आपका उत्तर भिन्न होगा?(I will your answer differ in case you test it at 1% level of significance?)

हल:- $N=100 \quad \overline{X}=3.25\,cm \quad \mu=2.74 \quad \sigma=2.5$

$H_o:\mu=2.74 \quad H_1:\mu \neq 2.74$ द्विपार्श्व परीक्षण (Two tail test)

$\alpha=0.05$ Z= ± 1.96 (क्रान्तिक मूल्य)

$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ यहाँ $\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2.5}{\sqrt{100}}=0.25$

$Z=\dfrac{3.24-2.74}{0.25}=\dfrac{0.50}{0.25}=2$

परिकलित Z का मूल्य 2 क्रान्तिक मूल्य ± 1.96 के बाहर है, अत: शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है अर्थात् इसे दिए गए समग्र का न्यादर्श नहीं माना जा सकता।

$H_o:\mu=2.74 \quad H_1:\mu \neq 2.74$ Two tail test

$\alpha=0.01$ Z= ± 2.58

उपर्युक्त परिकलित Z का मूल्य 2 क्रान्तिक मूल्य ± 2.58 की सीमाओं के अन्तर्गत है अत: 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर शून्य परिकल्पना स्वीकृत की जाती है। अर्थात् इसे दिये गए समग्र का न्यादर्श माना जा सकता है।

7.10 दो समान्तर माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण (Test of Significance of difference between two means):-

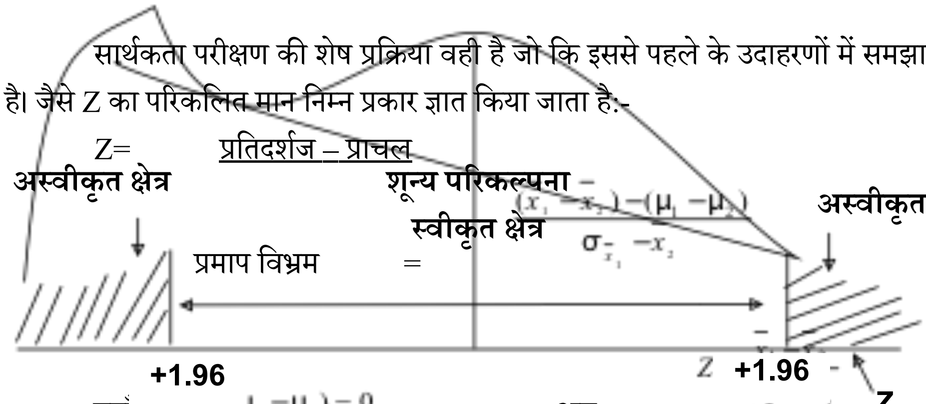
अनुसंधान कार्यों में बहुधा दो प्रतिदर्शजों (Statistics) के अन्तर के आधार पर उनका एक ही समग्र से होने अथवा न होने संबंधी परिकल्पनाओं का परीक्षण किया जाता है। उदाहरण के लिए एक प्रतिदर्श में पुरूष औसत रूप से 2 घंटे प्रतिदिन तथा महिलाएँ $1\frac{1}{2}$ घंटे प्रतिदिन शोध पत्रिका का अध्ययन करते हैं तो क्या दोनों के अध्ययन के समय में सार्थक अन्तर है अथवा नहीं ? यहाँ पुरूषों के प्रतिदर्श द्वारा अधिक अध्ययन करना संयोगवश भी हो सकता है। दूसरे शब्दों में यह अन्तर निदर्शक त्रुटि के कारण संयोगवश उत्पन्न हुआ है अथवा वास्तविक अंतर है। इसके परीक्षण की आवश्यकता होती है। इस परीक्षण में समग्र के समान्तर माध्यों में अन्तर शून्य $(\mu_1 - \mu_2 = 0)$ माना जाता है अर्थात् $(\mu = \mu_2)$ की शून्य परिकल्पना लेकर जाँच आरंभ की जा सकती है। एकपक्षीय जाँच की स्थिति में दायीं बाहु परीक्षण (Right tailed test) में $(\mu_1 \leq \mu_2)$ तथा बायीं बाहु परीक्षण (Left tailed test) में $(\mu_1 \geq \mu_2)$ शून्य परिकल्पना ली जा सकती है।

सार्थकता परीक्षण करने के लिए प्रमाप विभ्रम की आवश्यकता होती है। समान्तर माध्यों के अंतर का प्रमाप त्रुटि या विभ्रम (Standard Error) का सूत्र:-

	जब समग्र का प्रमाप विचलन (S.D.) ज्ञात हो	**जब समग्र का प्रमाप विचलन (S.D.) ज्ञात नहीं हो**
$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$

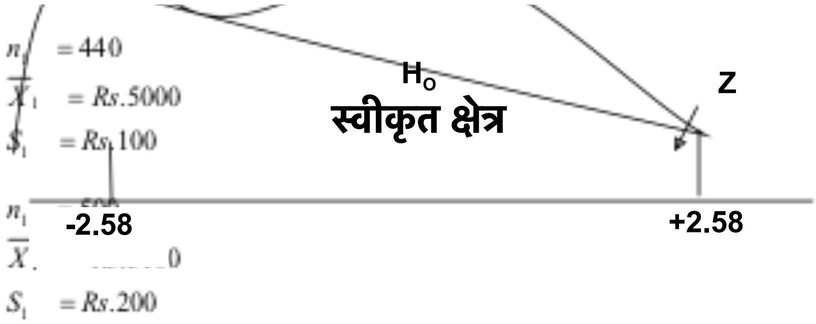
सार्थकता परीक्षण की शेष प्रक्रिया वही है जो कि इससे पहले के उदाहरणों में समझायी गई है। जैसे Z का परिकलित मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है:-

$$Z = \frac{\text{प्रतिदर्शज – प्राचल}}{\text{प्रमाप विभ्रम}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$



यहां $(\mu_1 - \mu_2) = 0$ अत: $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$

उदाहरण:- पुरूष (X_1) तथा महिला शिक्षकों के वेतन से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े उपलब्ध हैं। (अ) क्या 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर पुरूष तथा महिला शिक्षकों के औसत वेतन में अंतर है? (ब) क्या 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर पुरूष शिक्षकों का औसत वेतन महिला शिक्षिकाओं से कम है?



हल:- (a) $H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$

$n_2 = 500$

$\overline{X}_2 = Rs.5100$

$S_2 = Rs.\ 200$

or $\mu_1 - \mu_2 = 0$

or $\mu_1 > \mu_2 \neq 0$

$\alpha = 0.5$ $Z = \pm 1.96$ (क्रान्तिक मान) (द्विबाहु परीक्षण)

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}}$$

यहाँ $\sigma_{\overline{x}_1 - \overline{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$

$$= \sqrt{\frac{100^2}{440} + \frac{200^2}{500}}$$

$$= \sqrt{22.73 + 80} = \sqrt{102.73}$$

$$= 10.14$$

$$= \frac{5000 - 5100}{10.14}$$

$$= \frac{-100}{10.14} = -9.86$$

Z का परिकलित मान – 9.86 Z के क्रान्तिक मान ± 1.96 की सीमाओं से बाहर है अत: शून्य परिकल्पना (H_o) अस्वीकृत की जाती है। पुरूष तथा महिला शिक्षकों के वेतन में सार्थक अन्तर है (वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकृत की जाती है)

(b) H_o : $\mu_1 \geq \mu_2$; H_1 : $\mu_1 \leq \mu_2$ (बायीं बाहु परीक्षण)

$\alpha = .05$ $Z = -1.65$ क्रान्तिक मान

Z का परिकलित मूल्य (-9.86) क्रान्तिक मूल्य (-1.65) से कम होने के कारण शून्य परिकल्पना

अस्वीकृत क्षेत्र में है, अत: वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकार की जाती है।

निष्कर्ष:- 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर पुरूष शिक्षकों का वेतन महिला शिक्षिकाओं से कम है।

7.11 दो समान्तर माध्यों के अन्तर का सार्थकता परीक्षण:- जब उनमें सहसंबंध गुणांक दिया हो (Test of significance of difference between two means when coefficient of correlation between them is given):

इस स्थिति में प्रमाप त्रुटि (Standard Error) का सूत्र निम्न प्रकार होगा:-

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n_1 + n_2} - 2r\frac{S_1 S_2}{n_1 n_2}}$$

उदाहरण:- 60 पिताओं और उनके 100 पुत्रों पर किए गए एक बौद्धिक परीक्षण से निम्न परिणाम प्राप्त हुए-

पिताओं के माध्य प्राप्तांक = 114 ; प्रमाप विचलन = 13

पुत्रों के माध्य प्राप्तांक = 110 ; प्रमाप विचलन = 11

दोनों में सहसंबंध गुणांक + .75 मानकर दोनों माध्यों के अन्तर की प्रमाप त्रुटि निकालिए और मालूम कीजिए कि क्या अन्तर सार्थक है ?

हल:-

H_o : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

$\alpha = 0.05$

$Z = \pm 1.96$

$n_1 = 60$; $\bar{X} = 114$; $S_1 = 13$; $n_2 = 100$;

$\bar{X}_2 = 110$; $S_2 = 11$; $r = +.75$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} - 2r\frac{S_1 x S_2}{n_1 x n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(13)^2}{60} + \frac{(11)^2}{100} - 2x.75x\frac{13x11}{60x100}} = 2$$

$$= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1} - \bar{X}_2} = \frac{114 - 110}{2} = 2$$

$2 > 1.96$, H_o rejected

7.12 दा अनुपाता क अतर का साथकता का पराक्षण (Test of significance of difference between two proportions):-

समग्र से लिए गए प्रतिदर्शों के अनुपात के आधार पर समग्रों के अनुपात की सार्थकता का परीक्षण किया जाता है। परीक्षण विधि दो समान्तर माध्यों में अन्तर की सार्थकता परीक्षण की तरह ही है।

शून्य परिकल्पना का आधार है कि दोनों समग्रों के अनुपातों में अंतर सार्थक नहीं है। इससे संबंधित परिकल्पनाएँ निम्न प्रकार हो सकती है:-

Left Tail Test	**Right Tail Test**	**Two Tail Test**
$H_O : P_1 \geq P_2$	$H_O : P_1 \leq P_2$	$H_O : P_1 = P_2$
$H_1 : P_1 < P_2$	$H_1 : P_1 > P_2$	$H_1 : P_1 \neq P_2$

अनुपातों के अन्तर का प्रमाप त्रुटि का सूत्र (Formula of Standard Error of difference between two proportions)

जब समग्र के अनुपात P_1 तथा P_2 ज्ञात हो।

$$\sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{\frac{P_1 Q_1}{n_1} + \frac{P_2 Q_2}{n_2}}$$

जब समग्र के अनुपात P_1 तथा P_2 ज्ञात न हो: सामूहिक अनुपात (P_O) का अनुमान लगाएं।

$$P_o = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$$

$$Q_o = 1 - P_o$$

$$\sigma_{P_1} - P_2 = \sqrt{P_o Q_o \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

7.13 प्रतिदर्श समान्तर माध्य तथा सामूहिक समान्तर माध्य के अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (Test of Significance of difference between sample mean and combined mean) :

इसके लिए प्रमाप त्रुटि तथा Z के सूत्र निम्न प्रकार होगें:-

i. जब प्रथम माध्य का सामूहिक माध्य से सार्थकता परीक्षण करना हो-

$$\sigma_{\bar{x}_1} - \bar{x}_{12} = \sqrt{\sigma_{12}^2 \frac{n_2}{n_1 \; (n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_{12}}{\ }$$

$\sigma_{\bar{x}_1} - x_{\scriptscriptstyle \square}$

ii. जब द्वितीय माध्य का सामूहिक माध्य से सार्थकता परीक्षण करना हो-

$$\sigma_{\bar{x}_2} - \bar{x}_{\scriptscriptstyle \square} = \sqrt{\sigma_{12}^{\ 2} \frac{n_1}{n_1 \quad (n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_{12}}{\sigma_{\bar{x}_2} - x_{\scriptscriptstyle \square}}$$

7.14 प्रतिदर्श प्रमाप विचलन तथा सामूहिक प्रमाप विचलन (SD) के अन्तर का सार्थकता परीक्षण (Test of significance of difference between sample standard deviation and combined standard deviation):

इसके लिए प्रमाप त्रुटि तथा Z के सूत्र निम्न प्रकार हैं:-

I. जब प्रथम प्रतिदर्श प्रमाप विचलन का सामूहिक प्रमाप विचलन से सार्थकता परीक्षण करना हो-

$$\sigma_{S_1} - S_{12} = \sqrt{\sigma^2 \quad \frac{n_2}{2\, n_1\, (n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{S_1 - S_{12}}{\sigma_{S_1} - S_{12}}$$

II. जब द्वितीय प्रतिदर्श प्रमाप विचलन का सामूहिक प्रमाप विचलन से सार्थकता परीक्षण करना हो:-

$$\sigma_{S_1} - S_{12} = \sqrt{\sigma^2 \quad \frac{n_1}{2\, n_2\, (n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{S_2 - S_{12}}{\sigma_{S_2} - S_{12}}$$

7.15 प्रतिदर्श अनुपात तथा संयुक्त अनुपात के अन्तर का सार्थकता परीक्षण(Test of significance of difference between sample proportion and combined proportion):-

इस स्थिति में प्रमाप त्रुटि तथा Z के सूत्र निम्नलिखित है:-

I. जब प्रथम प्रतिदर्श अनुपात तथा सामूहिक अनुपात का सार्थकता परीक्षण करना हो:-

$$\sigma_{P_1} - P_o = \sqrt{P_o\, Q_o \frac{n_2}{n_1\, (n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{P_1 - P_o}{\sigma_{P_1} - P_o}$$

$\sigma_{P_1} \; P_o$

II. जब द्वितीय प्रतिदर्श अनुपात तथा सामूहिक अनुपात का सार्थकता परीक्षण करना हो:-

$$\sigma_{P_2} - P_o = \sqrt{P_o\, Q_o \frac{n_1}{n_2\,(n_1 + n_2)}}$$

$$Z = \frac{P_2 - P_o}{\sigma_{P_2} - P_o}$$

7.16 स्वातंत्र्य कोटियाँ (Degree of Freedom):-

स्वातंत्र्य कोटि से तात्पर्य एक समंक श्रेणी के ऐसे वर्गों से है जिसकी आवृत्तियाँ स्वतंत्र रूप से निर्धारित की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, इसका तात्पर्य प्राप्तांकों को स्वतंत्र रूप से परिवर्तित (freedom to vary) होने से होता है। जब साँख्यिकी (Statistics) का प्रयोग प्राचल (Parameter) का आकलन करने के लिए किया जाता है, तो स्वातंत्र्य मात्रा की संख्या रखे गए प्रतिबंधों (restrictions) पर निर्भर करता है। प्रत्येक ऐसे प्रतिबंध के लिए स्वातंत्र्य मात्रा (one degree of freedom) सीमित हो जाता है। यही कारण है कि स्वातंत्र्य मात्रा की संख्या (number of degree of freedom) एक साँख्यिकी से दूसरे साँख्यिकी के लिए अलग-अलग होता है। स्वातंत्र्य कोटि या मात्रा को निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है। उदाहरण के लिए 3 विद्यार्थियों के अंक 70 प्रतिशत हैं। पहले विद्यार्थी के अंक 80 प्रतिशत, दूसरे विद्यार्थी के अंक यदि 75 प्रतिशत हैं अब तीसरे विद्यार्थी के अंक बताने के लिए आप स्वतंत्र नहीं है, तीसरे विद्यार्थी के अंक तो 55 प्रतिशत ही होंगे। इस उदाहरण में प्रथम दो विद्यार्थियों के अंक यदि 90 प्रतिशत तथा 40 प्रतिशत हों, तब भी आप तीसरे विद्यार्थी के अंक बताने के लिए स्वतंत्र नहीं हैं, क्योंकि उसके अंक 80 प्रतिशत ही होंगे। दूसरे शब्दों में, समान्तर माध्य ज्ञात होने पर विचरण (n-1) स्वातंत्र्य कोटियों के कारण ही होता है। स्वातंत्रय कोटियाँ (Degrees of Freedom):-

d.f. अथवा v = n-1

एक सारणी में स्वातंत्र्य कोटियाँ (d.f.) = (r-1) (c-1) यहाँ r पंक्तियों की संख्या तथा c स्तंभों की संख्या है।

7.17 स्टूडेण्ट t- परीक्षण (Student's t- Distribution (test):

t' परीक्षण छोटे आकार के निदर्शन (sampling) से संबंधित है, इसका श्रेय आयरिश निवासी विलियम गौसेट को जाता है, जिन्होंनें अपने छद्म नाम स्टूडेण्ट के नाम से इसे प्रकाशित किया, क्योंकि जिस संस्था में वे काम करते थे, उसने उन्हें अपने नाम से इसे प्रकाशित करने की अनुमति नहीं प्रदान की। सामान्यत: t- परीक्षण या अनुपात दो माध्यों के बीच के अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए एक महत्वपूर्ण प्राचलिक साँख्यिकी है-

't' परीक्षण निम्नलिखित स्थितियों में प्रयुक्त किया जाना चाहिए:-

i. जब प्रतिदर्श का आकार 30 या 30 से कम हो ($n \leq 30$),
ii. जब समग्र का प्रमाप विचलन ज्ञात न हो तथा,
iii. जब समग्र का बंटन एक प्रसामान्य बंटन हो,
iiii. जब दोनों प्रतिदर्शो से मिले प्राप्तांकों के वितरण में प्रसरण की समजातीयता (homogeneity of variance) हो,
v. जब प्रयुक्त चरों का माप अन्तराल (Interval) का अनुपात (Ratio) मापनी पर हो।

v. जब प्रयुक्त चरों का मान अन्तराल (Interval) या अनुपात (Ratio) मापनी पर हो।

इसे निम्न प्रकार सरलता से समझा जा सकता है-

	जब σ ज्ञात हो (σ known)	**σअज्ञात हो (σ not know)**
N > 30	Z	Z
n ≤ 30	Z	T

स्टूडेण्ट t- बंटन की विशेषताएँ(Characteristics of Student's t- distribution):-

स्टूडेण्ट का t- बंटन प्रसामान्य नहीं होता हालांकि जिस समग्र में से इसे लिया जाता है, वह निश्चित रूप से प्रसामान्य बंटन होना चाहिए।

1. प्रत्येक प्रतिदर्श आकार (n) के लिए एक पृथक 't' बंटन होता है। अत: प्रसामान्य बंटन की तरह 't' बंटन का भी एक परिवार है। अत: एक मानक 't' बंटन ज्ञात कर लिया जाता है, जिसका समान्तर माध्य शून्य तथा प्रमाप विचलन 1 है।
2. प्रत्येक 't' बंटन एक सममित (Symmetrical) बंटन होता है।
3. वक्र का उच्चतम बिन्दु t = 0 अर्थात् माध्य पर स्थित होता है।
4. जैसे- जैसे n का मान बढ़ता जाता है t वक्र प्रसामान्य वक्र का आकार ग्रहण करने लगता है। जैसे-जैसे n का मान 30 से बड़ा होता जाता है वैसे-वैसे t- वक्र तथा प्रसामान्य वक्र में अन्तर समाप्त होता जाता है। वास्तव में 't' के सारणी मूल्य में अन्तर समाप्त होता जाता है। वास्तव में 't' के सारणी मूल्य के लिए प्रतिदर्श के आकार के स्थान पर स्वतंत्र्य कोटियों की आवश्यकता होती है।
5. प्रत्येक 't' बंटन एक प्रायिकता बंटन है अत: इसके अंतर्गत कुल क्षेत्रफल 1.0 होता है।
6. 't' बंटन में प्रसरण (variance) प्रसामान्य बंटन की अपेक्षा अधिक होता है।

't' परीक्षण का अनुप्रयोग (Application of t-test) :

(i) **दो स्वतंत्र समूहों के माध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच (The significance of the Difference between the Means of two Independent Group:-**

t- मान की गणना = $\dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{N_1} + \dfrac{S_2^2}{N_2}}}$

X_1 = प्रथम समूह का मध्यमान

X_2 = द्वितीय समूह का मध्यमान

N_1 = प्रथम समूह में सदस्यों की संख्या

N_2 = द्वितीय समूह में सदस्यों की संख्या

S_1^2 = प्रथम समूह का प्रसरण

S_2^2 = द्वितीय समूह का प्रसरण

उदाहरण:- विद्यार्थियों के दो समूहों पर एक बुद्धि परीक्षण प्रशासित किया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए। यह जाँच कीजिए कि क्या दोनों समूहों की बुद्धि में सार्थक अन्तर है?

प्रथम समूह में विद्यार्थियों की संख्या = 32प्रथम समूह का मध्यमान = 87.43प्रथम सम्ूह का प्रसरण = 39.40द्वितीय सम्ूह में विद्यार्थियों की संख्या = 34द्वितीय समूह का मध्यमान = 82.58द्वितीय समूह का प्रसरण = 40.80

हल:- $H_o : \overline{X}_1 = \overline{X}_2$

$H_1 : \overline{X}_1 \neq \overline{X}_2$

$N_1 = 32$ $N_2 = 34$ $\overline{X}_1 = 87.43$ $\overline{X}_2 = 82.58$ $S_1^2 = 39.40$ $S_2^2 = 40.80$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} = \frac{87.43 - 82.58}{\sqrt{\frac{39.40}{32} + \frac{40.80}{34}}}$$

$$= \frac{4.85}{\sqrt{1.23 + 1.20}} = \frac{4.85}{\sqrt{2.43}} = \frac{4.85}{1.56} = t = 3.11$$

यहाँ परिकलित t- का मान जो 3.11 है जो 64 df पर 1% सार्थकता के स्तर पर t के सारणी मान 2.58 से ज्यादा है। अत: यहाँ नल परिकल्पना $H_o : \overline{X}_1 = \overline{X}_2$ को अस्वीकृत किया जाता है। अर्थात् यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि दोनों समूहों की बुद्धि में सार्थक अन्तर है।

(ii) **दो छोटे स्वतंत्र समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच (Significance of the Difference between two small sample Independent means:**

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)\, S_1^2 + (N_2 - 1)\, S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}$$

(iii) **प्रसरण की समजातीयता की जाँच (To test the Homogeneity of Variances):-** प्रसरण की समजातीयता की जाँच t- परीक्षण के लिए एक आवश्यक शर्त है। इसकी जाँच निम्न सूत्र से की जाती है:-

$$F = \frac{S^2 \quad \text{बड़ा प्रसरण (Largest Variance)}}{S^2 \quad \text{छोटा प्रसरण (Smallest Variance)}}$$

F अनुपात का मान हमेशा 1 से ज्यादा होता है, क्योंकि बड़े प्रसरण को हमेशा अंश (numerator) के रूप में रखा जाता है तथा छोटे प्रसरण को हर (denominator) के रूप में। इस सूत्र से F के परिकलित मान को F – सारणी (किस ी अपेक्षित सार्थकता व स्वतंत्र्य कोटि के मान पर) मान से तुलना की जाती है। यदि परिकलित F मान < F का सारणी मान, तो यह माना जाता है कि दोनों समूहों के प्रसरणों में समजातीयता है।

उदाहरण:- छात्रों एवं छात्राओं के दो समूहों को एक गणित- उपलब्धि परीक्षण दी गयी और निम्न आँकड़े प्राप्त हुए। यह जाँच कीजिए कि क्या दोनों समूहों के गणितीय उपलब्धि में सार्थक अन्तर है?

छात्र समूह	छात्रासमूह
$\overline{X}_1 = 14$	$\overline{X}_2 = 9$
$S_1^2 = 19.60$	$S_2^2 = 20.44$
$N_1 = 12$	$N_2 = 12$

हल:- $F = \frac{20.44}{19.60} = 1.04$ (प्रसरणों में समजातीयता है)

df = $N_1 + N_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)\; S_1^2 + (N_2 - 1)\; S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

$$= \frac{14-9}{\sqrt{\frac{11\ (19.60)+9\ (20.44)}{12+10-2}\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)}}$$

$$= \frac{5}{\frac{\sqrt{215.60+183.96}}{20}\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right)}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{19.98x\frac{11}{60}}} = \frac{5}{\sqrt{3.66}} = \frac{5}{1.91} = 2.62$$

20 d.f. तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर t का सारणी मान = 2.086 t का परिकलित मान = 2.62

यहाँ df = N_1+N_2 – 2= 32+34 – 2=66-2 = 64

चूंकि t का परिकलित मान > t का सारणी मान

अत: यहाँ नल प्राक्क्रल्पना $(H_o = \overline{X}_1 = \overline{X}_2)$ ह

निष्कर्ष निकाला जाता है कि दोनों समूहों के गणितीय उपल

(iiii) **दो सहसंबंधित या मैचिंग (Matched or Correlated) समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच (Significance of the Difference between the Means of Two Matched or Correlated Group (Non independent sample)**

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1}+\frac{S_1 2}{N_2} - 2r\ \left(\frac{S_1}{\sqrt{N_1}}\right)\ \left(\frac{S_2}{\sqrt{N_2}}\right)}}$$

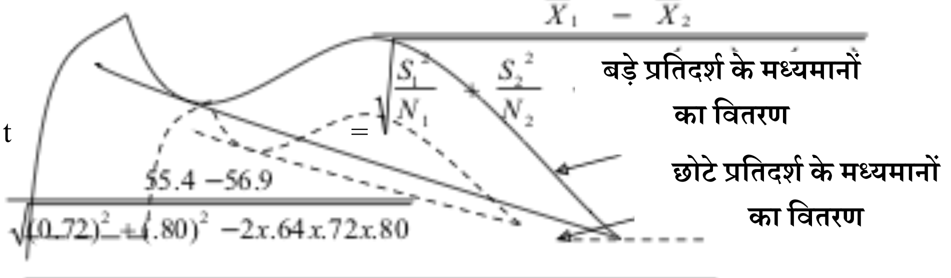
r = दोनों समूहों के मध्य सहसंबंध की मात्रा

उदाहरण:- एक कक्षा के 91 विद्यार्थियों को एक हिन्दी व्याकरण परीक्षण दिया गया तथा एक माह के प्रशिक्षण के बाद पुन: एक समरूप हिन्दी व्याकरण परीक्षण इन परीक्षणों के प्राप्तांक का सारांश नीचे दिया है। गणना के आधार पर बताइये कि क्या प्रशिक्षण का कोई सार्थक प्रभाव पड़ा ?

	प्रथम परीक्षण	**द्वितीय परीक्षण**
N	91	91
मध्यमान	55.4	56.9
S.D.	7.2	8.0

$\left(\frac{S_1}{\sqrt{N_1}}\right) = 0.72$ $\left(\frac{S_2}{\sqrt{N_2}}\right) = 0.80$

$S.E_{M1} = \sqrt{N_1}$ $SE_{M2} = \sqrt{N_2}$ r = .64



$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} = \frac{55.4 - 56.9}{\sqrt{(0.72)^2 + (.80)^2 - 2x.64x.72x.80}}$$

$$= \frac{1.5}{\sqrt{.5184 + .6400 - .7373}} = \frac{1.5}{\sqrt{1.1584 - .7373}} = \frac{1.5}{\sqrt{.4211}} = \frac{1.5}{.669} = 02.31$$

यहाँ df = (N-1) = (91-1) = 90: यहाँ प्राप्त t का 2.31 मान 5% के सार्थकता के स्तर पर सार्थक है तथा 1 प्रतिशत पर नहीं। अत: यहाँ नल परिकल्पना की 5 प्रतिशत की सार्थकता के स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है तथा यह सत्य है कि प्रशिक्षण का हिन्दी व्याकरण के उपलब्धि पर सार्थक प्रभाव पड़ा है।

(v) **सहसंबंध गुणांक का सार्थकता परीक्षण (To test the significance of coefficient of correlation) :-** जब हम एक द्विचर प्रसामान्य समग्र (bivariate normal population में से युग्मित समंको का एक दैव न्यादर्श (random sample) चुनते है तथा इस परिकल्पना (hypothesis) की जाँच करना चाहते है कि समग्र का सहसंबंध गुणांक P (ग्रीक अक्षर Rho) शून्य है अर्थात् चर आपस में सहसंबंधित नहीं हैं तो t परीक्षण का प्रयोग करते हैं। यहाँ पर d.f को n-2 से ज्ञात करते हैं, क्योंकि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने में दो स्वतंत्रता की मात्राएँ कम हो जाती है। इसके ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है:-

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} X \quad \sqrt{n-2}$$ क्योंकि $$\sigma_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{n-2}$$

यदि t का परिकलित (Calculate) मूल्य, t की क्रांतिक मानों (Critical values or table values) से अधिक होगा तो सहसंबंध गुणांक सार्थक होगा।

उदाहरण:

i. किसी प्रसामान्य समग्र में से 20 युग्मित अवलोकनों के यादृच्छिक प्रतिदर्श का सहसंबंध गुणांक 0.9 है। क्या यह संभव है कि समग्र में चर असंबंधित हैं?

ii. किसी वस्तु के दो समूहों में से 10 और 20 के आकार के युग्मित प्रतिदर्श लिए गए। वस्तुओं का दो विशेषताओं के मध्य सहसंबंध गुणांक क्रमश: 0.25 एवं 0.16 हैं। क्या ये मान सार्थक हैं?

हल:

i. इस परिकल्पना के साथ कि समग्र में चर स्वतंत्र हैं तथा उनमें शून्य सहसंबंध है:-

H_o : P= 0 i H_1 : P ≠ 0

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} X \quad \sqrt{n-2} = \frac{0.9}{\sqrt{1-(.9)^2}} X \quad \sqrt{20-2} = \frac{0.9}{\sqrt{1-.81}} X \quad \sqrt{18}$$

$$= \frac{.9x4.243}{\sqrt{0.19}} = \frac{3.818}{0.436} \qquad t = 8.759$$

18 d.f तथा 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य ± 2.10 है तथा t का परिकलित मान 8.759 क्रांतिक मान से अधिक है। अत: मानी गयी परिकल्पना असत्य है अर्थात् सहसंबंध गुणांक सार्थक है।

ii. H_o : P = 0

H_1 : P ≠ 0

N = 10, r = .25

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} X \quad \sqrt{n-2}$$

$$= \frac{.25}{\sqrt{1-(.25)^2}} X \quad \sqrt{10-2}$$

= .73

8 d. f पर तथा 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य 2.306 है जिससे परिगणित मूल्य (0.73) कम है सहसंबंध गुणांक सार्थक नहीं है।

H_o : P = 0

H_1 : P ≠ 0

N = 20, r = .16

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} X \quad \sqrt{n-2}$$

$$= \frac{.16}{\sqrt{1-(.16)^2}} X \quad \sqrt{20-2}$$

= 0.688

18 d. f पर तथा 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य 2.10 है जिसकी तुलना में परिगणित मूल्य (0.688) कम है। अत: सहसंबंध गुणांक सार्थक नहीं है।

है।

दोनों स्थितियों में ही हमारी परिकल्पना सत्य सिद्ध होती है, जिसका अर्थ है कि समग्र में सहसंबंध गुणांक शून्य है।

7.18 क्रांतिक अनुपात का मान (Value of Critical Ratio (CR):

दो समूहों के मध्यमान के अन्तर की सार्थकता की जाँच अलग-अलग विधियों के द्वारा की जाती है। बड़े समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio = CR) के मान के द्वारा की जाती है जबकि छोटे समूहों के मध्यमानों की सार्थकता की जाँच t-परीक्षण के मान के द्वारा की जाती है। जब प्रतिदर्शों का मान 30 या 30 से अधिक होता है तो उनके मध्यमानों के अन्तर की जाँच क्रांतिक अनुपात परीक्षण (Critical Ratio Test) द्वारा की जाती है। CR की गणना में तीन पदों का अनुसरण किया जाता है-

i. सार्थकता स्तर का निर्धारण – प्राय: दो सार्थकता स्तर 0.05 या 0.01 का प्रयोग किया जाता है।

ii. प्रमाप विभ्रम या प्रमाणिक त्रुटि या प्रमाप त्रुटि (Standard Error) की गणना। विभिन्न

सांख्यिकियों के प्रमाप त्रुटि की गणना हेतु सूत्रों की व्याख्या इससे पूर्व इकाई में की गयी है।

iii. CR का मान : CR का मान ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है

$$CR = \frac{M_1 - M_2}{SEd}$$

M_1 = प्रथम प्रतिदर्श का मध्यमान

M_2 = द्वितीय प्रतिदर्श का मध्यमान

SE_d = दो प्रतिदर्श के मध्यमानों के अन्तर की प्रमाणिक त्रुटि

अर्थात् जब N का मान 30 से कम होता है तो ऐसे समूह को छोटा समूह कहते है। छोटे समूह में CR के स्थान पर t की गणना की जाती है। प्रत्येक t- मान CR होता है लेकिन प्रत्येक CR का मान t- नहीं होता।

7.19 F- परीक्षण (test) या प्रसरण विश्लेषण (Analysis of Variance) एनोवा (ANOVA):

जैसा कि आपने इससे पूर्व अध्ययन किया है कि t- test का प्रयोग दो प्रतिदर्शों में माध्यों के बीच सार्थक अन्तर का पता लगाने के लिए किया जाता है। लेकिन जब दो से अधिक प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच सार्थक अन्तर का पता लगाना होता है तो F- परीक्षण या प्रसरण विश्लेषण (Analysis of Variance-ANOVA) का प्रयोग किया जाता है। यदि हमें तीन प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच सार्थक अन्तर का पता लगाना है तो 6- F- test का प्रयोग करना होगा जो अपने आप में एक जटिल (व अपव्ययी) कार्य होगा। t- test की सख्या जितनी अधिक होगी Type-I त्रुटि की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। इन कमियों को दूर करने के लिए ANOVA या F- test जैसे प्रभावशाली संख्यिकी का प्रयोग किया जाता है। इस साँख्यिकी का प्रतिपादन R.A Fisher द्वारा किया गया जिनके सम्मान में उनके शिष्य जी डब्ल्यू स्नेडेकर (G.W. Snedecor) ने इसे F- अनुपात या F- परीक्षण (F- test) कहा है।

प्रसरण विश्लेषण, प्रसरण (variance) के दो अनुमानों का तुलनात्मक अध्ययन है। प्रतिदर्शों के प्रसरण (variance) के अनुपात को F अनुपात कहते हैं। सभी संभव F अनुपातों के आधार पर निर्मित बटन- F बंटन कहलाता है इस प्रकार t, काई वर्ग (x^2) की तरह F भी एक प्रतिदर्शज (Statistic) है।

प्रसरण विश्लेषण में निम्न प्रकार की संक्रियाएँ (Operations) सन्निहित होती हैं :

1. कुल समूहों का प्रसरण (Vt) (Total group Variance)
2. (Vw) समूहों के अन्तर्गत प्रसरण (Within groups variance)
3. V_t - V_w = समूहों के मध्य प्रसरण (V_b)(Between groups variance)
4. F अनुपात के परिकलन का सूत्र

$$F = \frac{V_b}{V_w} = = \frac{\textbf{between} - \textbf{groups Variance}}{\textbf{within} - \textbf{groups variance}}$$

समूहों के अन्तर्गत प्रसरण (V_w) बंटन के प्रतिदर्श त्रुटि (Sampling error) का प्रतिनिधित्व करता है जिसे त्रुटि प्रसरण(error variance) या अवशेष (residual) भी कहते हैं। समूहों के मध्य

करता है जिसे त्रुटि-प्रसरण(error variance) या अवशेष (residual) भी कहते हैं। समूहों के मध्य प्रसरण (Between groups variance), प्रयोगात्मक चरों के प्रभाव को दर्शाता है। यदि F अनुपात का मान 1 से ज्यादा है तो इसका अर्थ है कि समूहों के मध्य प्रसरण या प्रयोगात्मक प्रसरण (Experimental Variance) का मान समूहों के अन्तर्गत प्रसरण या त्रुटि प्रसरण के मान से ज्यादा है। F अनुपात का क्रान्तिक मान (Critical Ratio values) F- table से प्राप्त किया जाता है जो किसी निश्चित सार्थकता स्तर पर नल परिकल्पना को अस्वीकृत करने के लिए आवश्यक है।

F सारणी में दो प्रकार के स्वातंत्र्य कोटियाँ (d*f*) होती हैं।

: V_b का d*f* → V_b अर्थात अंश (Numerator) →

: V_w अर्थात हर (denominator) का d*f*

V_w का d*f* परिकलित करने के लिए सभी समूहों के सदस्य संख्या में से समूहों की संख्या को घटा दिया जाता है अर्थात $df(V_w) = N_1 + N_2 + \ldots\ldots\ldots - K$ (समूहों की संख्या)।

V_b का d*f* परिकलित ज्ञात करने के लिए समूहों की संख्या में से एक को घटा दिया जाता है अर्थात $df(V_b) = K - 1$; V_t का d*f* ज्ञात करने के लिए V_w का d*f* तथा V_b का d*f* को जोड़ दिया जाता है अर्थात V_t का d*f* = V_w का d*f* + V_b का d*f*: उदाहरण के लिए यदि चार समूहों में कुल सदस्य संख्या 60 है जिसमें प्रत्येक समूह में सदस्यों की संख्या बराबर है अर्थात प्रत्येक समूह में सदस्यों की संख्या= पंद्रह है तो V_w का d*f* = 15 + 15 + 15 + 15 – 4 = 56 ; V_w का d*f* = 4 – 1 = 3 ;

V_t का d*f* = 56 + 3 = 59

F मान के परिकलन में V_b जो समूहों के मध्य वर्गों का माध्य (Mean Squared between या MS_b) कहलाता है तथा V_w जो समूहों के अन्तर्गत वर्गों का माध्य (Mean Squared within या MS_w) भी कहलाता है के अनुपात का प्रयोग किया जाता है।

$$F = \frac{\mathbf{MS_b}}{\mathbf{MS_w}} = \frac{Mean\ Squared\ between}{Mean\ suared\ within}$$

अर्थात F = प्रतिदर्शो के मध्य विचलन वर्गो का योग (Sum of Square between column, SSC/ प्रतिदर्शो के अन्तर्गत विचलन वर्गो का योग (Sum of Square within Row, SSR)

$$= \frac{\mathbf{SS_c}}{\mathbf{SS_w}} = \frac{\frac{\mathbf{SS_c}}{K-\mathbf{1}\,(df)}}{\frac{\mathbf{SS_w}}{N-K\,(df)}} = \frac{MS_b}{MS_w}$$

ध्यातव्य हो कि कुल विचलन वर्गों का योग (Total Sum of square) $\mathbf{SS_T} = \mathbf{SS_c} + \mathbf{SS_w}$

या, $\mathbf{SS_c} = \mathbf{SS_T} - \mathbf{SS_w}$

$\mathbf{SS_w} = \mathbf{SS_T} - \mathbf{SS_c}$

7.20 F बंटन की विशेषताएँ (Characteristics of F-distribution):

(i) प्रत्येक F बंटन का विस्तार 0 से + ∞ तक होता है।

(ii) F सारणी को अंश (Numerator) तथा हर (denominator) की स्वातंत्र्य कोटियों के आधार पर देखा जाता है।

(iii) प्रत्येक F बंटन एक प्रायिकता बंटन है तथा इसका क्षेत्रफल 1 होता है।

(iiii) यह एक सतत बंटन है अत: क्षेत्रफल (प्रायिकता) का अनुमान लगाने के लिए दो सीमाओं की आवश्यकता होती है।

(v) F एक सममित बंटन नहीं है तथा F के मूल्य सदैव धनात्मक होते हैं क्योंकि प्रसरण जब ऋणात्मक नहीं हो सकता, तब प्रसरण का अनुपात ऋणात्मक कैसे होगा?

(vi) प्रत्येक अंश तथा हर की स्वातंत्र्य कोटि के समुच्चय के लिए एक पृथक F बंटन होता है, इस प्रकार F बंटन का एक वृहत परिवार है।

(vii) F बंटन का प्रयोग बहुत सावधानीपूर्वक करने की आवश्यकता है, क्योंकि इसका प्रयोग तभी संभव है, जब दोनों समग्र प्रसामान्य हों, इसमें किसी प्रकार की कोई छूट की गुंजाईश नहीं है।

F – बंटन ($n_1 - 1 = 12$ तथा $n_2 - 1 = 16$ कोटियों के लिए)

यह चित्र F बंटन को दर्शाता है जबकि अंश तथा हर की स्वातंत्र्य कोटियाँ क्रमश: 12 तथा 16 हैं तथा प्रदर्शित करना है कि 5 प्रतिशत मूल्य 2.42 से अधिक होगे। इस अध्ययन सामग्री के पीछे भाग में 5 प्रतिशत तथा 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर के लिए F बंटन की सारणियाँ उपलब्ध हैं । उदाहरण के लिए 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर अंश की स्वातंत्र्य कोटि 12 तथा हर की स्वातंत्र्य कोटि 16 के लिए मूल्य देखना हो तब स्तंम्भ में 12 तथा पंक्ति में 16 के लिए जो उभयनिष्ट मूल्य (intersectional value) 2.42, F की अधिकतम सीमा निर्धारित करेगा, तथा परिकलित मान यदि इससे अधिक होगा तो शून्य परिकल्पना अस्वीकृत कर दी जाएगी।

7.21 F –परीक्षण के अनुप्रयोग (Application of F-test):

दो समग्र प्रसरणों का परिकल्पना परीक्षण (Testing Hypotheses about two Population Variances): शून्य परिकल्पना निर्धारित करते समय मान्यता होती है कि दोनों समग्र के प्रसरण (प्राचल) समान हैं , सार्थकता स्तर का निर्धारण किया जाता है तथा F का सारणी मूल्य (क्रान्तिक मान) अंश तथा हर स्वातंत्र्य कोटियों के आधार पर निर्धारित कर दिया जाता है। यदि F का परिकलित मान क्रान्तिक मान से कम होता है तो दोनों प्रसरणों की समानता संबंधी परिकल्पना स्वीकृत कर दी जाती है। इसके विपरीत यदि प्रसरणों में अन्तर सार्थक है, तो संबंधी वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकृत कर दी जाती है।

F सारणी से क्रांतिक मान का निर्धारण :

(i) **एक बाहु (पुच्छीय) परीक्षण के लिए-** यहाँ बड़े प्रसरण को सदैव अंश में रखते हैं तथा छोटे प्रसरण को हर में। ऐसा सारणी मूल्य को देखने में सुविधा की दृष्टि से किया जाता है। इसी प्रकार सारणी का मूल्य देखते है। इस अध्ययन पुस्तिका में सारणी एक बाहु (दांया बाहु) परीक्षण के आधार पर दी गई है।

(ii) **द्विबाहु परीक्षण (two tailed test)** – द्विबाहु परीक्षण में सार्थकता स्तर को आधा कर लेते हैं, जैसे 2% सार्थकता स्तर के लिए 1% का सारणी का मूल्य देखेगें। यह मूल्य F वक्र के दायीं ओर लिखा जाएगा, बायीं ओर का मूल्य सदैव 1 से कम होगा, उसको

ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है, उदाहरण के लिए 12 तथा 15 कोटियो के लिए F का मूल्य 1 प्रतिशत के लिए 3.67 है, 15 तथा 12 के लिए मूल्य देखेंगे। यह 4.01 है इसका व्युत्क्रम 1/4.01 = 0.25, यह क्रान्तिक मान की निचली सीमा होगी। यह 12,15 स्वातंत्र्य कोटियों के लिए 95 प्रतिशत दायीं ओर के लिए F का मूल्य है।

उदाहरण : किसी विद्यालय के दो कक्षाओं IX और X के विद्यार्थियों की गणित विषय में उपलब्धि के विश्लेषण से निम्न परिणाम प्राप्त हुए:

	कक्षा IX	कक्षा X
विद्यार्थीयों की संख्या	5	6
प्रसरण	100	121

(i) क्या दोनों कक्षाओं के विचरण में सार्थक अन्तर है ?(सार्थकता स्तर 2%)

(ii) (क्या कक्षा X का प्रसरण कक्षा IX के प्रसरण से अधिक है? सार्थकता स्तर 1%)

हल :

कक्षा IX का प्रसरण $= \frac{d\sum_1^2 \square}{n_1 - 1}$

कक्षा X का प्रसरण $= \frac{d\sum_2^2 \square}{n_2 - 1}$

$= \frac{n_1 s_2^2}{n_2 - 1}$

$= \frac{6 \times 121}{(6-1)} = 145.2$

(जबकि $s_1^2 = \frac{d\sum_1^2 \square}{n_{\square}}$)

$\Rightarrow d\sum_1^2 \square = n_1 s_1^2$

अत: कक्षा में IX का प्रसरण $= \frac{n1\, s_1^2}{n_1 - 1}$

$= \frac{5 \times 100}{(5-1)} = 125$

(i) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad (\sigma_1^2/\sigma_1^2 = 1)$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ Two tailed test

Degrees of freedom $D_1 = 4$

$D_2 = 5$

$F = \frac{125}{145.2} = 0.86$

$\frac{\text{Mean Squared between}}{\text{Mean suared within}}$

क्रान्तिक मूल्य F $(D_1, D_2, \propto)$

उच्चतम सीमा F (4,5, .01) = 11.39

निम्न सीमा F (4,5,.99) $= \frac{1}{F\,(5,4,.01)}$

$= \frac{1}{15.52} = 0.06$

क्योंकि F का परिकलिन मूल्य (0.86) H_0 स्वीकृति क्षेत्र में है अर्थात 0.06 तथा 11.39 के मध्य है, अत: H_0 स्वीकृति की जाती है, अर्थात 2% सार्थकता स्तर (अथवा 98 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर) पर दोनों प्रसरणों में सार्थक अन्तर नहीं है। दोनों समग्रों के प्रसरण समान माने जा सकते हैं।

(ii) $H_o : \sigma_2^2 \leq \sigma_1^2$

$H_1 : \sigma_2^2 > \sigma_1^2$

$F(4, 5, .01) = 11.39$

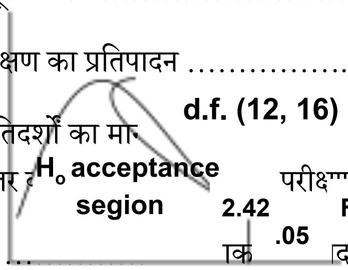
क्योंकि F का परिकलित मान 0.86 क्रान्तिक मान 11.39 से कम है अत: 1 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर कक्षा X का प्रसरण कक्षा IX के प्रसरण से अधिक नहीं है बल्कि समान है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

11. F एक …………………..बंटन नहीं है।

12. F के मूल्य सदैव …………………….. होते हैं।

13. F- परीक्षण का प्रतिपादन ……………..द्वारा किया गया।



14. जब प्रतिदर्शों का मा… …होता है तो उनके मध्यमानों के अन्तर … परीक्षण (Test) द्वारा की जाती है।

15. ……… …क …दर्शन (sampling) से संबंधित है, इसका श्रेय आयरिश निवासी विलियम गौसेट को जाता है,

7.22 समग्र के माध्यों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (Significance of difference between population mean)

F बंटन के द्वारा समग्र के माध्यों में अन्तर सार्थक है अथवा नहीं, संबंधी परिकल्पना परीक्षण भी किया जाता है। शून्य परिकलन का निर्धारण करते समय यह माना जाता है कि बंटन समग्रों के माध्य तथ प्रसरण समान हैं तथा सभी समग्रों का बंटन प्रसामान्य है। प्रतिदर्शों के आधार पर यह परिकल्पना स्वीकृत की जा सकती है। यदि केवल दो माध्यों का सार्थकता परीक्षण करना है तब t- बंटन के आधार पर ऐसा किया जा सकता है लेकिन 5 माध्यों की स्थिति में t परीक्षण 10 बार ज्ञात करने होंगे। इसके आधार पर परस्पर प्रतिदर्शों के मध्य प्रसरण (Between samples) तथा प्रतिदर्शों के अन्तर्गत प्रसरण (within samples) का अनुपात (F अनुपात) ज्ञात कर शून्य परिकल्पना को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत किया जा सकता है।

उदाहरण : निम्नलिखित संमक विद्यार्थियों के तीन समूहों Y_1, Y_2 तथा Y_3 के भाषा (X_1), गणित (X_2) व विज्ञान (X_3) उपलब्धियों के परीक्षण प्राप्तांकों से संबंधित हैं।

समूह	X_1	X_2	X_3
Y_1	10	13	4
Y_2	16	19	7
Y_3	19	22	13

क्यों तीनों समूहों के उपलब्धि में सार्थक अन्तर है ?

हल:

(i) सर्वप्रथम आप माध्य ज्ञात कीजिए :

$$\overline{X_1} = (10 + 16 + 19) \div 3 = 15$$

$$\bar{X}_2 = (13 + 19 + 2\square) \div 3 = 18$$

$$\bar{X}_2 = (4 + 7 + 13) \div 3 = 08$$

(ii) तब आप माध्यों का माध्य ज्ञात करें ($\bar{\bar{X}}$):

$$(\bar{\bar{X}}) = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_\square}{K}$$ जबकि K = प्रतिदर्शों की संख्या = 3

$$(\bar{\bar{X}}) = \frac{15 + 18 + 08}{3} = 13.67$$

(iii) प्रतिदर्शों में परस्पर अन्तर का प्रसरण (Between Variance)

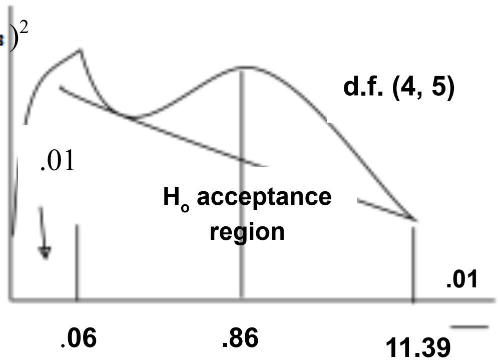
$$= \frac{n_1 (\bar{X}_1 - \bar{\bar{X}})^2 + n_2 (\bar{X}_2 - \bar{\bar{X}})^2 + n_3 (\bar{X}_3 - \bar{\bar{\square}})^2}{K - 1}$$

$$= \frac{3(15 - 13.67)^2 + 3\ (18 - 13.67)^2 + 3\ (8 - 13.6)^2}{3 - 1}$$

$$= \frac{5.33 + 56.33 + 96.34}{2} = \frac{158}{2} = 79$$

(iiii) **विभिन्न विषयों के अन्तर्गत प्रसरण (Within Variance)**

X_1	$(X_1 - \bar{X}_1)^2$	X_2	$(X_2 - \bar{X}_2)^2$	X_3	$(X_3 - \bar{X}_3)^2$
10	25	13	25	4	16
16	1	19	1	7	1
19	16	22	16	13	25
	42		42		42



अन्तर्गत प्रसरण (Within variance) (V_w) =

$$\frac{\Sigma (X_1 - \bar{X}_1)^2 + \Sigma (X_2 - \bar{X}_2)^2 + \Sigma (X_3 - \bar{X}_3)^\square}{(N - K)}$$

$$= \frac{42 + 42 + 42}{9 - 3} = \frac{126}{6} = 21$$

$\mu_o : \mu_A = \mu_B = \mu_C$

H_1: सभी माध्य समान नहीं है (All μ are not equal)

सार्थकता स्तर $\propto = 0.05$ क्रांतिक मान F (2,6, .05) = 5.14

$$F = \frac{V_b}{V_w} = \frac{79}{21} = 3.76$$

F का परिकलित मान 3.76 सारणी मान 5.14 से कम है। अत: 5% सार्थकता स्तर पर अन्तर सार्थक नहीं है अर्थात समग्र के तीन समूहों के तीन विषयों के उपलब्धियों का स्तर समान है।

वैकल्पिक विधि :लघु रीति (Short-cut method) – उपर्युक्त उदाहरण को लघु रीति द्वारा हल किया जा सकता है। इसकी प्रक्रिया निम्न प्रकार से है।

संशोधन कारक ज्ञात कीजिए (Correction factor) (C.F.) = $\frac{T^2}{N}$

कुल विचलन वर्गो का योग ज्ञात कीजिए (Total sum of square) (SST)=

$$X\sum_{1}^{2} \square + X\sum_{2}^{2} \square + X\sum_{3}^{2} \square - C.F$$

प्रतिदर्शों के अन्तर्गत अथवा त्रुटि के कारण विचलन वर्गो का योग ज्ञात कीजिए (Sum of Square within on sue to error (SSE)= SST – SSC

इसके पश्चात् आप प्रसरण ज्ञात कीजिए। प्रसरण को विचलन वर्गों का माध्य(Mean Squared Deviations अथवा MS कह सकते हैं। इस प्रकार, MSC = $\frac{SSC}{(K-1)}$; MSE = $\frac{SSE}{(N-K)}$

उपर्युक्त सभी गणनाओं को एक प्रसरण विश्लेषण सारणी (Analysis of Variance table) अथवा ANOVA table के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

ANOVA TABLE

प्रसरण के स्रोत Source of variable	**प्रसरण का योग Sum of square**	**स्वतंत्र्य कोटि Degrees of freedom**	**विचलन वर्गों का माध्य Mean squared deviation**	**F**
प्रतिदर्शों के माध्य (Between Samples)	SSC (SS_B) SSE (SS_w)	K-1 N-K	MSC (MS_B) MSt (MS_w)	F= $\frac{MS_B}{MS_W}$
प्रतिदर्शों के अन्तर्गत (Within samples)				
कुल (Total)	SST			

उदाहरण : उपर्युक्त उदाहरण को लघु रीति द्वारा हल कीजिए।

हल:

विषयवार उपलब्धि

समूह	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2
Y_1	10	100	13	169	4	16
Y_2	16	256	19	361	7	49
Y_3	19	361	22	484	13	169
	45	717	54	1014	24	234

C.F $= \dfrac{T^2}{N} = \dfrac{(45+54+24)^2}{9} = \dfrac{(123)^2}{9} = 1681$

SST $= \sum X_1^2 + \sum X_2^2 + \sum X_3^2 - CF$ $= 717 + 1014 + 234 - 1681 = 284$

SSC $= \dfrac{(\sum X_1)^2}{n_1} + \dfrac{(\sum X_2)^2}{n_2} + \dfrac{(\sum X_3)^2}{n_3} - CF = \dfrac{(45)^2}{3} + \dfrac{(54)^2}{3} + \dfrac{(24)^2}{3} - 1681$

$= 675 + 972 + 192 - 1681 = 158$

SSE $= SST - SSC = 284 - 158 = 126$

एनोवा सारणी

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of freedom	Mean square	F
Between samples Within samples	SSC = 158	k- 1 = 3-1 = 2	$MSC = \dfrac{SSC}{k-1}$ $= \dfrac{158}{2} = 79$	$F = \dfrac{MSC}{MSE}$ $= \dfrac{79}{21}$ = 3.76
	SSE = 126	N - k = 9 - 3 = 6	$MSE = \dfrac{SSE}{N-k}$	

		= 9 - 3 = 6	$= \frac{126}{6} = 21$	
	SST = 284	N -1 = 9 -1 = 8		

F (2, 6, 0.05) का क्रान्तिक मान = 5.14

F का परिकलित मान (3.76) < का क्रान्तिक मान (5.14

शून्य परिकल्पना स्वीकृत की जाती है समूहों के विषयगत उपलब्धियों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है।

द्वि-मार्गीय प्रसरण विश्लेषण (Two - way Analysis of Variance): जब एक स्वतंत्र चर और एक आश्रित चर के मध्य संबंध का परीक्षण किया जाता है तो यह एक मार्गीय प्रसरण विश्लेषण (one-way Analysis of Variance) कहलाता है। जब एक बुद्धि परीक्षण को तीन समूहों जिसमें भाषा पढ़ने वाले, विज्ञान पढ़ने वाले व गणित पढ़ने वाले समूहों पर प्रशासित किया जाता है। और यह पता लगाया जाता है कि क्या इन तीनों समूहों के माध्य बुद्धि परीक्षण प्राप्तांक में सार्थक भिन्नता है, तो यह एक-मार्गीय प्रसरण विश्लेषण (one - way ANOVA) का उदाहरण है।

जब दो स्वतंत्र चरों और एक आश्रित चर के मध्य संबंध का परीक्षण किया जाता है तो यह द्वि-मार्गीय प्रसरण विश्लेषण (Two - way Analysis of Variance) कहलाता है । जब एक बुद्धि परीक्षण और अभिक्षमता परीक्षण को तीन समूहों में जिसमें दर्शनशास्त्र पढ़ने वाले, भाषा पढ़ने वाले व गणित पढ़ने वाले समूहों पर प्रशासित किया जाता है। और यह पता लगाया जाता है कि क्या तीनों समूहों के माध्य बुद्धि परीक्षण व माध्य अभिक्षमता प्राप्ताकों में सार्थक भिन्नता है, तो यह द्वि-मार्गीय प्रसरण विश्लेषण (Two - way ANOVA) का उदाहरण है। कभी- कभी हम एक से अधिक शून्य परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति करना चाहते हैं। उदाहरण के लिए उपर्युक्त प्रश्न में आपने प्रतिदर्शों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण किया था जबकि प्रतिदर्शों को कॉलम में दिखया गया था। ऐसा परीक्षण एक मार्गीय परीक्षण कहलाता है। यदि उपर्युक्त प्रश्न में आप यह भी जानना चाहें कि क्या विभिन्न विषयों के उपलब्धियों में कोई सार्थक अन्तर है अथवा नहीं, तब इम इसे द्वि-मार्गीय परीक्षण करेंगे। द्वि-मार्गीय परीक्षण तथा एकमार्गीय परीक्षण में अन्तर को निम्न प्रकार समझा जा सकता है।

जब कुल विचलन वर्गों के दो भागों में बाँटा जाता है तब उसे एकमार्गीय परीक्षण कहते हैं। जबकि SST को जब तीन भागों में बाँटा जाता है तब द्वि-मार्गीय परीक्षण कहलाता है। द्वि-मार्गीय परीक्षण में C.F, SST तथा SSC निकालने की विधि में अन्तर नहीं है, लेकिन SSR तथा SSE निम्न प्रकार निकालने होंगे।

पंक्तियों के विचलन वर्गों का योग (Sum of square between rows):

$$SSR = \frac{(\sum Y_1)^2}{k_1} + \frac{(\sum Y_2)^2}{k_2} + \frac{(\sum Y_3)^2}{k_3} - CF$$

अवशेष अथवा त्रुटि के कारण विचलन वर्गों का योग (Residual or sum of squares due to error) : SSE = SST – (SSC + SSR)

इसकी परिकलन प्रक्रिया को निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है।

उदाहरण: उपर्युक्त उदाहरणों के समकों का प्रयोग करते हुए बताइए कि क्या विभिन्न विषयों तथा विभिन्न समूहों की उपलब्धि में अन्तर सार्थक है ?

विषयवार उपलब्धि प्राप्तांक

समूह	X_1	X_2	X_3	पंक्तियों का योग
Y_1	10	13	4	=27
Y_2	16	19	7	=42
Y_3	19	22	13	=54
				123
स्तभों का योग (Sum of columns)	45	54	24	

प्रथम परिकल्पना – विषयवार उपलब्धि में अन्तर की सार्थकता परीक्षण

$H_o (1) = \mu_{X_1} = \mu_{X_2} = \mu_{X_3}$

$H_1 (1) = \mu_{X_1} \neq \mu_{X_2} \neq \mu_{X_3}$

द्वितीय परिकल्पना – समूहों की उपलब्धि में अन्तर की सार्थकता परीक्षण

$H_o (2) = \mu_{Y_1} = \mu_{X_{Y_2}} = \mu_{Y_3}$

$H_1 (2) = \mu_{Y_1} \neq \mu_{Y_2} \neq \mu_{Y_3}$

$$C.F = \frac{T^2}{N} = \frac{(123)^2}{9} = 1681$$

$$SST = \sum X_1^2 + \sum X_2^2 + \sum X_3^2 - CF = 717 + 1014 + 234 - 1681 = 284$$

$$SSC = \frac{(\sum X_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum X_2)^2}{n_2} + \frac{(\sum X_3)^2}{n_3} - CF$$

$(45)^2 \quad (54)^2 \quad (24)^2$

$= \frac{[illegible]}{3} + \frac{[illegible]}{3} + \frac{[illegible]}{3} - 1681 = 158$

$$SSR = \frac{(\Sigma Y_1)^2}{k_1} + \frac{(\Sigma Y_2)^2}{k_2} + \frac{(\Sigma Y_3)^2}{k_3} - CF$$

$$= \frac{(27)^2}{3} + \frac{(42)^2}{3} + \frac{(54)^2}{3} - 1681 = 122$$

SSE = SST- (SSC + SSR)= 284 – (158 + 122) =284 – 280 = 4

ANOVA TABLE

Source of Variation	Sum of squares	Degrees of freedom	Mean Square	F
Between / among Subjects	SSC = 158	k -1 = 3-1=2	MSC = $\frac{SSC}{k-1} = \frac{158}{2}$ =79	FC = $\frac{MSC}{MSE} = \frac{79}{1}$ = 79
Between / among groups	SSR = 122	r-1 = 3-1 = 2	MSR = $\frac{SSR}{r-1} = \frac{122}{2}$ =61	FR = = $\frac{MSR}{MSE} = \frac{61}{1}$ = 61
Residual / Error	SSE = 4	(k -1) (r-1) = 2 × 2=4	MSE = $\frac{SSE}{4} = \frac{4}{4}$ = 1	
Total				
	284	=8		

Critical Value for F_c (2,4,.05) = 6.94

F_c का परिकलित मूल्य (79) क्रान्तिक मूल्य (6.94) से अधिक है, अत: शून्य परिकल्पना अस[illegible]ति विषयवार उपलब्धि में अन्तर

द्वि-मार्गीय परीक्षण

एकमार्गीय परीक्षण

SST

F_R का प[illegible]ूल्य (61) क्रन्तिक मूल्य (6.94) से अधिक है, अत: शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है अर्थात समूहों में अन्तर सार्थक है।

SST

7.23 मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन (Changing origin [illegible]ling of d[illegible]

SSC + SSE

SSC + SSR + SSE

F अनुपात पर मूल बिन्दु के परिवर्तन तथा पैमाने के परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अत: दी गई संख्याओं में किसी प्रकार राशि (constant) को जोड़ा अथवा घटाया जाए अथवा अचर राशि से गुणा किया जाए तथा भाग दिया जाए तो F अनुपात समान रहता है।

7.24 सारांश

प्रस्तुत इकाई में आपने अनुमानात्मक साँख्यिकी, क्रांतिक अनुपात, शून्य परिकल्पना का परीक्षण, [illegible]

सार्थकता परीक्षण, त्रुटियों के प्रकार, एक पुच्छीय तथा द्विपुच्छीय परीक्षण, टी – परीक्षण की परिकलन विधि तथा एफ – परीक्षण (एनोवा) की परिकलन विधि के बारे में अध्ययन किया। यहाँ पर इन सभी सम्प्रत्ययों के बारे में संक्षिप्त विवरण दिया जा रहा है।

कार्य के आधार पर साँख्यिकी को दो भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है- वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive statistics) व अनुमानात्मक साँख्यिकी (inferential statistics)। वर्णनात्मक साँख्यिकी, संख्यात्मक तथ्यों का साधारण ढंग से वर्णन करता है। अनुमानात्मक साँख्यिकी (inferential statistics) यह बतलाती है कि एक प्रतिदर्श (Sample) के प्राप्तांकों (Scores) के आधार पर मिले साँख्यिकी उस बड़े समग्र (Population) का किस हद तक प्रतिनिधित्व करता है, जिससे कि वह प्रतिदर्श लिया गया था।

अनुमानात्मक साँख्यिकी को दो भागों में वर्गीकृत किया जाता है:-

i. प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics)
ii. अप्राचलिक साँख्यिकी (Nonparametric Statistics)

प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics) वह साँख्यिकी है, जो समग्र (Population) जिससे कि प्रतिदर्श (Sample) लिया जाता है, के बारे में कुछ पूर्वकल्पनाओं या शर्तों (Conditions) पर आधारित होता है। अप्राचल साँख्यिकी (Nonparametric Statistics) उस समग्र के बारे में जिससे कि प्रतिदर्श निकाला जाता है, कोई खास शर्त नहीं रखती है। यह समग्र के वितरण के बारे में कोई पूर्वकल्पना नहीं करती इसलिए इसे वितरण मुक्त साँख्यिकी (distribution-free statistics) भी कहते हैं।

शोध परिकल्पना से तात्पर्य वैसी परिकल्पना से होता है जो किसी घटना तथ्य के लिए बनाये गये विशिष्ट सिद्धान्त (Specific Theory) से निकाले गये अनुमिति (deductions) पर आधारित होती है। शोध समस्या के समाधान के लिए एक अस्थायी तौर पर हम एक प्रस्ताव तैयार कर लेते हैं, जिसे शोध परिकल्पना की संज्ञा दी जाती है। शून्य या निराकरणीय या नल परिकल्पना वह परिकल्पना है जिसके द्वारा हम चरों के बीच कोई अन्तर नहीं होने के संबंध का उल्लेख करते हैं। नल परिकल्पना को दो प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है- दिशात्मक परिकल्पना (Directional Hypothesis) तथा अदिशात्मक परिकल्पना (No directional Hypothesis)।

जब नल परिकल्पना की अभिव्यक्ति, अदिशात्मक रूप में किया जाता है तो इसे द्वि-पार्श्व परीक्षण (Two- tailed test) कहा जाता है। इसके विपरीत जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता चलता है तो उसे एक पार्श्व परीक्षण (One- tailed test) कहा जाता है।

नल परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति के लिए कुछ विशेष कसौटियों का इस्तेमाल किया जाता है। ये विशेष कसौटियाँ सार्थकता के स्तर के नाम से जानी जाती है। व्यावहारिक विज्ञान के शोधों में नल परिकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए प्राय: सार्थकता के दो स्तरों का चयन किया जाता है- 0.05 स्तर या 5 प्रतिशत स्तर तथा .0.01 या 1 प्रतिशत स्तर।

सत्य शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति ही प्रथम प्रकार की त्रुटि है। द्वितीय प्रकार की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है, जबकि गलत शून्य परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है।

स्वातंत्र्य कोटि से तात्पर्य एक समंक श्रेणी के ऐसे वर्गों से है जिसकी आवृत्तियाँ स्वतंत्र रूप से निर्धारित की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, इसका तात्पर्य प्राप्तांकों को स्वतंत्र रूप से परिवर्तित (freedom to vary) होने मे होता है।

(freedom to vary) ...

t' परीक्षण छोटे आकार के निदर्शन (sampling) से संबंधित है, इसका श्रेय आयरिश निवासी विलियम गौसेट को जात◌ा है।'t' परीक्षण का अनुप्रयोग (Application of t-test) : दो स्वतंत्र समूहों के मध्यमान◌ो◌ं के अन्तर की सार्थकता की जाँच, दो छोटे स्वतंत्र समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच, दो सहसंबंधित या मैचिंग समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच, तथा सहसंबंध गुणांक का सार्थकता परीक्षण के लिए किया जाता है।

बड़े समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio = CR) के मान के द्वारा की जाती है जबकि छोटे समूहों के मध्यमानों की सार्थकता की जाँच t-परीक्षण के मान के द्वारा की जाती है। जब प्रतिदर्शों का मान 30 या 30 से अधिक होता है तो उनके मध्यमानों के अन्तर की जाँच क्रांतिक अनुपात परीक्षण (Critical Ratio Test) द्वारा की जाती है।

जब दो से अधिक प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच सार्थक अन्तर का पता लगाना होता है तो F- परीक्षण या प्रसरण विश्लेषण (Analysis of Variance-ANOVA) का प्रयोग किया जाता है। इसके अलावा F- परीक्षण से प्रसरण की समजातीयता की जाँच भी की जाती है।

7.25 शब्दावली

वर्णनात्मक साँख्यिकी (Descriptive statistics): वर्णनात्मक साँख्यिकी, संख्यात्मक तथ्यों का साधारण ढंग से वर्णन करता है।

अनुमानात्मक साँख्यिकी (Inferential statistics): यह बतलाती है कि एक प्रतिदर्श (Sample) के प्राप्तांकों (Scores) के आधार पर मिले साँख्यिकी उस बड़े समग्र (Population) का किस हद तक प्रतिनिधित्व करता है, जिससे कि वह प्रतिदर्श लिया गया था।

प्राचलिक साँख्यिकी (Parametric Statistics): यह वह अनुमानात्मक साँख्यिकी है, जो समग्र (Population) जिससे कि प्रतिदर्श (Sample) लिया जाता है, के बारे में कुछ पूर्वकल्पनाओं या शर्तों (Conditions) पर आधारित होता है।

अप्राचल साँख्यिकी (Nonparametric Statistics): यह वह अनुमानात्मक साँख्यिकी है उस समग्र के बारे में जिससे कि प्रतिदर्श निकाला जाता है, कोई खास शर्त नहीं रखती है। यह समग्र के वितरण के बारे में कोई पूर्वकल्पना नहीं करती इसलिए इसे वितरण मुक्त साँख्यिकी (distribution-free statistics) भी कहते हैं।

शोध परिकल्पना (Research Hypothesis): शोध समस्या के समाधान के लिए एक अस्थायी तौर पर हम एक प्रस्ताव तैयार कर लेते हैं, जिसे शोध परिकल्पना की संज्ञा दी जाती है।

नल परिकल्पना (Null Hypothesis): शून्य या निराकरणीय या नल परिकल्पना वह परिकल्पना है जिसके द्वारा हम चरों के बीच कोई अन्तर नहीं होने के संबंध का उल्लेख करते हैं।

दिशात्मक परिकल्पना (Directional Hypothesis): जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता चलता है।

अदिशात्मक परिकल्पना (No directional Hypothesis): जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता नहीं चलता है।

द्वि-पार्श्व परीक्षण (Two- tailed test): जब नल परिकल्पना की अभिव्यक्ति, अदिशात्मक रूप में किया जाता है तो इसे द्वि-पार्श्व परीक्षण (Two- tailed test) कहा जाता है।

एक पार्श्व परीक्षण (One- tailed test): जब शोधकर्ता नल परिकल्पना का उल्लेख इस प्रकार से करता है कि उसमें अध्ययन किये जाने वाले समूहों के बीच अन्तर की दिशा का पता चलता है तो उसे एक पार्श्व परीक्षण (One- tailed test) कहा जाता है।

सार्थकता स्तर Level of significance): नल परिकल्पना की स्वीकृति या अस्वीकृति के लिए कुछ विशेष कसौटियों का इस्तेमाल किया जाता है। ये विशेष कसौटियाँ सार्थकता के स्तर के नाम से जानी जाती है। व्यावहारिक विज्ञान के शोधों में नल परिकल्पना को स्वीकृत या अस्वीकृत करने के लिए प्राय: सार्थकता के दो स्तरों का चयन किया जाता है- 0.05 स्तर या 5 प्रतिशत स्तर तथा .0.01 या 1 प्रतिशत स्तर।

प्रथम प्रकार की त्रुटि Type one error): सत्य शून्य परिकल्पना की अस्वीकृति ही प्रथम प्रकार की त्रुटि है।

द्वितीय प्रकार की त्रुटि (Type two error): इस प्रकार की त्रुटि उस दशा में उत्पन्न होती है, जबकि गलत शून्य परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है।

स्वातंत्र्य कोटि Degree of Freedom): इसका तात्पर्य प्राप्तांकों को स्वतंत्र रूप से परिवर्तित (freedom to vary) होने से होता है।

t' परीक्षण (t-test): t' परीक्षण छोटे आकार के निदर्शन (sampling) से संबंधित है, इसका श्रेय आयरिश निवासी विलियम गौसेट को जाता है। दो समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच t' परीक्षण द्वारा किया जाता है।

क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio): बड़े समूहों के मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच क्रान्तिक अनुपात (Critical Ratio = CR) के मान के द्वारा की जाती है। जब प्रतिदर्शों का मान 30 या 30 से अधिक होता है तो उनके मध्यमानों के अन्तर की जाँच क्रांतिक अनुपात परीक्षण (Critical Ratio Test) द्वारा की जाती है।

F- परीक्षण (F-test): परीक्षण या प्रसरण विश्लेषण (Analysis of Variance-ANOVA) से दो या दो से अधिक प्रतिदर्शों के माध्यों के बीच सार्थक अन्तर का पता लगाना होता है।

7.26 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

1. अदिशात्मक 2. नल परिकल्पना 3. प्राचलिक 4. अप्राचल 5. प्राचलिक 6. प्रथम प्रकार 7. द्वितीय प्रकार 8. कम 9. द्वि-पार्श्व 10. एक पार्श्व 11. सममित 12. धनात्मक 13. R.A Fisher 14. क्रांतिक अनुपात 15. t' परीक्षण

7.27 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

1. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
2. Tuckman Bruce W. (1978). Conducting Educational Research New York : Harcout Bruce Jovonovich Inc.
3. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास

4. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन
5. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
6. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.
7. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
8. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publications.

7.28 निबंधात्मक प्रश्न

1. अनुमानात्मक साँख्यिकी के अर्थ को स्पष्ट कीजिए एवं इसकी विशेषताओं की व्याख्या कीजिए।
2. प्राचलिक साँख्यिकी व अप्राचलिक साँख्यिकी के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।
3. एक पार्श्वव (पुच्छीय) तथा द्वि पार्श्वव (पुच्छीय) परीक्षण के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।
4. निराकरणीय परिकल्पना के अर्थ को स्पष्ट कीजिए तथा त्रुटियों के प्रकार (प्रथम व् द्वितीय) के मध्य अंतर स्पष्ट कीजिए।
5. निम्नलिखित आँकडों से टी – परीक्षण के मान का परिकलन कीजिए तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण कीजिए। (उत्तर 2.28)

	माध्य	S.D.	N	Df
लड़के	40.39	8.69	31	30
लड़कियां	35.81	8.33	42	41

6. निम्नलिखित आँकडों से एफ – परीक्षण (एनोवा) के मान का परिकलन कीजिए तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण कीजिए।(उत्तर 4.365)

I	II	III	IV	V
10	5	3	6	7
6	2	8	9	7
4	1	4	8	7
5	1	0	6	7
10	1	0	1	7

इकाई 8: अप्राचलिक साँख्यिकी: काई वर्ग परीक्षण
(Non Parametric Statistics: Chi –Square Test)

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

8.2 उद्देश्य

8.3 काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण एक परिचय

8.4 X^2 के प्रयोग की शर्तें

8.5 X^2 के विशेष गुण

8.6 X^2 जाँच के उपयोग

8.7 काई वर्ग की गणना का सूत्र

8.8 X^2 की गणना के चरण

8.9 काई वर्ग तथा प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना

8.10 येट संशोधन

8.11 आवृत्तियों का समूहन

8.12 अन्वायोजन की उत्कृष्टता की जाँच

8.13 समग्र के प्रसरण का परीक्षण

8.14 सारांश

8.15 शब्दावली

8.16 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर

8.17 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री

8.18 निबंधात्मक प्रश्न

8.1 प्रस्तावना:

कार्य के आधार पर साँख्यिकी को दो भागों में बांटा जाता है- विवरणात्मक साँख्यिकी (Descriptive Statistics) तथा अनुमानिक साँख्यिकी (Inferential Statistics)। अनुमानिक साँख्यिकी न्यादर्श (sample) के विशेषताओं के माध्यम से समग्र (population) के विशेषताओं के बारे में अनुमान लगाता है। अनुमानिक साँख्यिकी को उनके विशेषताओं के आधार पर दो भागों में वर्गीकृत किया जाता है- प्राचल साँख्यिकी (Parametric Statistics) तथा अप्राचल साँख्यिकी (Nonparametric Statistics)। प्राचल साँख्यिकी कठोर अभिग्रह (assumptions) पर आधारित होते हैं जबकि अप्राचल साँख्यिकी के सन्दर्भ में कठोर अभिग्रह नहीं होते। अप्राचल साँख्यिकी में प्रयुक्त आँकडों का संबंध प्रायः एक समष्टि के प्राचल (parameter) से भी नहीं होता। प्रसामान्य वितरण (normal distribution) के अभिग्रह भी इस विधि द्वारा प्राप्त निष्कर्षों पर लागू नहीं होते। इन तकनीकों को वितरण मुक्त (distribution free) या अप्राचलिक तकनीक कहते हैं। अप्राचलिक साँख्यिकी तकनीक के अंतर्गत बहत सारे साँख्यिकीय विधियां आती हैं - काई वर्ग परीक्षण (Chi-square Test), मान व्हिटनी यू परीक्षण (Mann Whitney U Test), क्रम निर्धारण सह संबंध गुणांक (Rank Order Coefficient of Correlation), मध्यांक परीक्षण (Median Test), चिन्ह परीक्षण (Sign Test), आसंग परीक्षण (Contingency Test) व फाई परीक्षण (Phi Test)। प्रस्तुत इकाई में आप काई वर्ग परीक्षण के बारे में वृहत अध्ययन करेंगे।

8.2 उद्देश्य:

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के उपरांत आप-

- काई वर्ग (Chi-Square) परीकृषण के अर्थ को स्पष्ट कर सकेंगे।
- काई-वर्ग परीक्षण के महत्व की व्याख्या कर सकेंगे।
- शैक्षिक अनुसंधान में काई-वर्ग परीक्षण के उपयोग को स्पष्ट कर सकेंगे।
- काई-वर्ग परीक्षण के प्रयोग की शर्तों को को स्पष्ट कर सकेंगे।
- काई-वर्ग परीक्षण का मान परिकलित कर सकेंगे ।

8.3 काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण एक परिचय :

अप्राचल विधियों (Non Parametric Methods) में काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण एक प्रमुख विधि है। काई (x) ग्रीक भाषा का एक अक्षर है। काई-वर्ग वितरण की खोज सन् 1875 में हेलमर्ट ने की थी। बाद में सन् 1900 में कार्ल पियर्सन ने पुन: इसका प्रतिपादन किया। सामाजिक एवं व्यावहारिक विज्ञानों के अनुसंधान कार्यों में काई-वर्ग परीक्षण का महत्व तथा उपयोग अत्यधिक होने के कारण इसका महत्व और भी बढ़ गया है। काई-वर्ग परीक्षण आवृत्तियों (frequencies) के मध्य अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (test of significance) करता है। अवलोकित (Observed) तथा प्रत्याशित (Expected) आवृत्तियों के अन्तरों के शून्य होने पर काई-वर्ग का मान शून्य हो जाता है। जबकि अधिक अन्तर होने पर काई वर्ग का मान बढ़ता जाता है। काई-वर्ग का मान सदैव धनात्मक होता है।काई-वर्ग बंटन एक प्रायिकता बंटन (probability distribution) है जो केवल स्वातन्त्रय कोटियों (Degrees of freedom, df) पर निर्भर करता है। स्वातन्त्रय कोटियों के बहुत कम होने पर काई वर्ग बंटन धनात्मक रूप से विषम होता है, परन्तु जैसे-जैसे स्वातन्त्रय कोटियॉ बढ़ती जाती है, यह प्रसामान्य बंटन के अनुरूप हो जाता है। काई वर्ग का परिकलित मान संबंधित स्वातन्त्रय कोटि तथा निश्चित सार्थकता स्तर पर (Level of Significance) सारणी मान से कम होता है, तब शून्य परिकल्पना (Null hypothesis) स्वीकृत की जाती है। इसके विपरीत यदि परिकलित काई-वर्ग का मान सारणी मान से अधिक होता है तथा अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अन्तर को सार्थक माना जाता है, तब वैकल्पिक परिकल्पना (Alternate Hypothesis) को स्वीकृत किया जाता है। अर्थात् शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है।

8.4 X^2 के प्रयोग की शर्तें (Conditions for applying X^2

8.4 X^2 के प्रयोग की शर्तें (Conditions for applying X^2-test):-

i. समग्र की इकाईयों की संख्या (N) यथोचित रूप से अधिक होनी चाहिए अन्यथा अवलोकित व प्रत्याशित आवृत्तियों के अन्तरों (fo-fe) का वितरण प्रसामान्य (Normal) नहीं होगा। व्यवहार में N=50 से अधिक होना चाहिए।

ii. कोई भी प्रत्याशित कोष्ठ-आवृत्ति (expected cell frequency) 5 से कम नहीं होना चाहिए। यदि कोई आवृत्ति 5 से कम है तो उसे निकटवर्ती आवृत्तियों के साथ मिलाकर येट-संशोधन (Yate's Correction) द्वारा X^2 का मूल्य निकालना चाहिए।

iii. प्रतिदर्श दैव आधार पर चुना हुआ होना चाहिए।

iiii. कोष्ठ आवृत्तियों के अवरोध (Constraints) रेखीय (Linear) होना चाहिए।

उपर्युक्त परिसीमाओं के उपरान्त भी काई वर्ग (**X^2**) गुण स्वातन्त्रय की जाँच और अन्वायोजन-उत्कृष्टता परीक्षण (Test of Goodness of fit) करने में बहुत उपयोगी सांख्कीय माप है।

8.5 X^2 के विशेष गुण (Special Properties of X^2)

i. **X^2 का संचयात्मक गुण (Additive property of X^2):-** काई वर्ग का एक अत्यंत उपयोगी गुण यह है कि यदि किसी समग्र (Population) से अनेक यादृच्छिक प्रतिदर्श (Random Sample) चुनकर उनका अध्ययन किया जाय तो प्रतिदर्शों के अलग-अलग X^2 के मान को जोड़कर पूरे समग्र के बारे में अधिक विश्वसनीय निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं।

ii. **X^2 बंटन का स्वरूप और स्वतंत्रता के अंश (Form of X^2-test and degree of freedom) :-** X^2 बंटन का स्वरूप df पर निर्भर करता है। प्रत्येक df के लिये एक अलग X^2 वक्र बनता है। बहुत कम df के लिए X^2 बंटन धनात्मक विषमता (Positive Skewed) वाले दाहिनी ओर को असममित वक्र (a Symmetrical curve) के रूप में होता है। जैसे-जैसे df की संख्या अधिक होती जाती है वक्र की असममिति कम होती जाती है अर्थात वह सममित की ओर बढ़ता जाता है। df 30 से अधिक होने पर बंटन, प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution) के अनुरूप हो जाता है।

8.6 X^2 जाँच के उपयोग (Application of X2 test):

आधुनिक शैक्षिक शोध में एक साँख्यिकीय प्रविधि के रूप में काई-वर्ग परीक्षण के बहुत व्यापक उपयोग हैं। यह शोधकर्ता का एक महत्वपूर्ण उपकरण है, जिसका निम्न परीक्षण में प्रयोग किया जाता है:-

i. **स्वतंत्रता की जाँच (Test of Independence):-** X^2 द्वारा दो गुणों (attributes) में साहचर्य (association) का परीक्षण किया जाता हे। उदाहरण के लिए साक्षरता और रोजगार में संबंध है या वे वस्तुत: स्वतंत्र हैं। माताओं और उनके पुत्रियों के बालों के रंग में साहचर्य है या नहीं, अधिगम और अभिप्रेरणा में संबंध है या वे वस्तुत: स्वतंत्र है इत्यादि। स्वातन्त्रय जाँच के लिए पहले दोनों गुणों को स्वतंत्र मान लिया जाता है (शून्य परिकल्पना, Null Hypothesis) फिर इस आधार पर प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकाली जाती हैं, जिनका अवलोकित आवृत्तियों से अन्तर ज्ञात करके काई-वर्ग का माप किया जाता है। अन्त में एक निश्चित सार्थकता स्तर पर (.01 या .05 पर) संबंधित df के

अनुरूप X^2 का सारणी मूल्य से मिलान किया जाता है। यदि X^2 का परिगणित मूल्य सारणी मूल्य से अधिक है तो शून्य परिकल्पना असत्य हो जाती है अर्थात् गुण स्वतंत्र नहीं होते अपितु उनमें साहचर्य पाया जाता है। इसके विपरीत स्थिति में शून्य परिकल्पना सत्य मानी जाती है।

ii. **अन्वायोजन-उत्कृष्टता की जाँच (Test of Goodness of fit) :-** X^2 का प्रयोग सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन (उदाहरण के लिए द्विपद या प्रसामान्य) और अवलोकित बंटन (observed distribution) में अंतर का परीक्षण करने के लिए भी किया जाता है। इस जाँच से यह पता चलता है कि अवलोकित आवृत्ति बंटन कहॉं तक सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन के अनुरूप है। दोनों में अंतर सार्थक है अथवा अर्थहीन। यदि परिकलित X^2 सारणी मूल्य से अधिक होता है तो अन्वायोजन उत्तम नहीं होता। इसके विपरीत जब परिकलित मूल्य प्रदत्त df पर सारणी मूल्य से कम होता है तो प्रत्याशित व अवलोकित आवृत्तियों का अन्तर अर्थहीन होता है अर्थात् यह केवल प्रतिचयन उच्चावचनों (Sampling Fluctuations) के कारण होता है, अन्य किसी कारण से नहीं।

iii. **समग्र प्रसरण की जाँच (Test of Population Variance):-** X^2 परीक्षण के द्वारा समग्र के प्रसरण की विश्वास्यता सीमाएँ निर्धारित की जाती है तथा इसके आधार पर यह भी ज्ञात किया जाता है कि प्रतिदर्श के प्रसरण तथा समग्र के प्रसरण में क्या कोई सार्थक अन्तर है ?

iiii. **सजातीयता की जाँच (Test of Homogeneity):-** यह स्वातंत्र्य परीक्षण का ही विस्तृत स्वरूप है। X^2 के प्रयोग द्वारा इस तथ्य की भी जाँच की जाती है कि विभिन्न प्रतिदर्श एक समग्र से लिए गए हैं, अथवा नहीं।

8.7 काई वर्ग की गणना का सूत्र (Formula to Calculate X^2)

$$X^2 = \Sigma \left[\frac{(fo - fe)^2}{fe}\right]$$

जबकि fo = प्रेक्षित या अवलोकित आवृत्तियाँ (observed frequency)

fe = प्रत्याशित आवृत्तियाँ (expected frequency)

8.8 X^2 की गणना के चरण (Steps of the Calculation of Chi-square):

i. प्रेक्षित (observed) आवृत्तियों को उनके उपयुक्त कोष्ठकों में लिखना।

ii. प्रत्याशित आवृत्तियों (fe) को कोष्ठकों में लिखना।

iii. प्रेक्षित (fo) तथा प्रत्याशित (fe) आवृत्तियों के मध्य अन्तर ज्ञात करना।

iiii. fo - fe के मान वर्ग करना।

v. प्रत्येक वर्गित मान को उससे संबंधित प्रत्याशित आवृत्तियों के मान से विभाजित करनी चाहिए।

vi. इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक संवर्ग के मान का योग ज्ञात करना।

vii. df ज्ञात करना: df = (c-1) (r-1) यहाँ c= स्तम्भों की सं0 r = पंक्तियों की सं0

viii. X^2 के मान की सार्थकता की जाँच df पर संबंधित सारणी से करना।

- यदि X^2 का परिकलित मूल्य : X^2 के सारणी मूल्य (संबंधित df तथा सार्थकता स्तर पर) से अधिक हो जाता है तो शून्य परिकल्पना (H_O) असत्य हो जाती है।
- यदि X^2 का परिकलित मूल्य X^2 के सारणी मूल्य (संबंधित df तथा सार्थकता स्तर पर) से कम हो जाता है, तो शून्य परिकल्पना (H_O) सत्य हो जाती है।

8.9 काई वर्ग तथा प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना (Claculation of Expected Frequencies for Chi-square):

X^2 में प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना निम्न तीन परिकल्पनाओं के आधार पर की जाती है।

i. समान वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Equal Distribution)
ii. प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना Hypothesis of Normal Distribution)
iii. स्वतंत्र वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Independent Distribution)

(i) समान वितरण परिकल्पना:- समान वितरण परिकल्पना द्वारा सार्थकता ज्ञात करने के लिए आवश्यक है कि परिवर्ती की संख्या एक ही हो। परिवर्ती कई भागों में विभाजित हो सकती है।

उदाहरण:- एक कक्षा के 51 विद्यार्थियों की मूल्य परीक्षण के एक प्रश्न के उत्तर की आवृत्तियाँ निम्न प्रकार से प्राप्त हुई। X^2 की समान वितरण के आधार पर परिकलित करके बताइये कि क्या उनके उत्तरों में वास्तविक अंतर है?

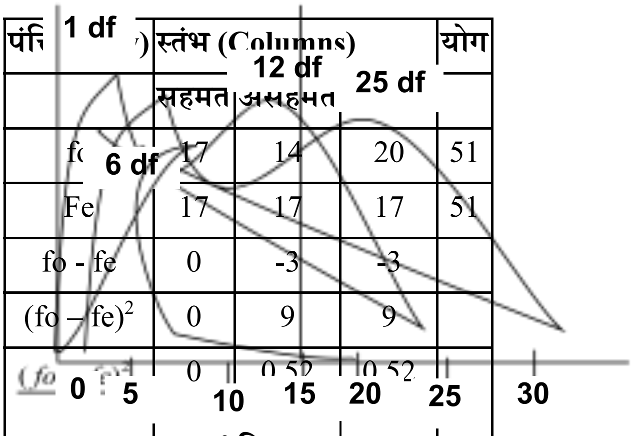
सहमत	असहमत	उदासीन
17	14	20

हल:- समान वितरण के आधार पर शून्य परिकल्पना यह है कि इन तीन वर्गों के आवृत्तियों में कोई सार्थक अंतर नहीं है। प्रत्याशित आवृत्तियाँ (expected frequency) = fe=

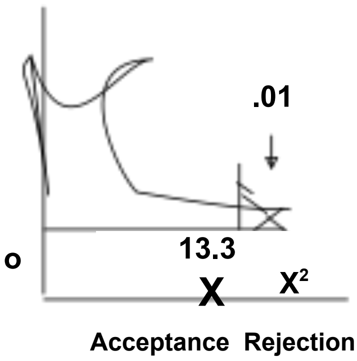
$$\frac{N}{No.of\ cells}$$

$$=\frac{51}{3}=17$$

पंक्ति [illegible]	स्तंभ (Columns)			योग
	सहमत	असहमत	[illegible]	
fo	17	14	20	51
Fe	17	17	17	51
fo - fe	0	-3	-3	
$(fo - fe)^2$	0	9	9	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$	0	0.52	0.52	



X^2 वितरण



$X^2 = 0 + 0.5$ [illegible] 04

df = (c -1) (r-1)

df = (c-1) (r-1)

नोट:- जब c तथा r की संख्या 1 से अधिक हो तभी उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। उपर्युक्त प्रश्न में r (पंक्ति) केवल एक ही है, परन्तु c (स्तम्भ) की संख्या 3 है। अत: यहाँ df का सूत्र (c -1) का प्रयोग करना चाहिए। अर्थात् df= (c-1)=3-1=2 है।

X^2 की तालिका में 0.05 विश्वास स्तर पर 2 df का मान = 5.95 तथा 0.01 विश्वास स्तर पर 2 df का मान = 9.21

उपर्युक्त उदाहरण में X^2 का मान 1.04 है जो दोनों विश्वास स्तरों के मान से कम है। इसलिए H_O को निरस्त नहीं किया जा सकता तथा यह निष्कर्ष निकलता है कि छात्रों के प्रत्युत्तर में सार्थक अन्तर नहीं है।

(ii) प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (Hypothesis of a Normal Distribution):- प्रसामान्य वितरण परिकल्पना में प्रत्याशित आवृत्तियों को ज्ञात करने का आधार प्रसामान्य वितरण का सिद्धान्त होता है।

उदाहरण:- एक अभिवृत्ति प्रश्नावली के एक प्रश्न का उत्तर 48 छात्रों ने निम्नलिखित तीन रूपों में दिया:-

असहमत	**उदासीन**	**सहमत**
25	11	12

सामान्य वितरण परिकल्पना से X^2 की गणना करके बताइए कि क्या तीनों श्रेणियों के आँकड़ों में सार्थक अन्तर है?

प्रसामान्य वक्र का संपूर्ण वितरण $+3\sigma$ तथा -3σ के बीच फैला रहता है। इस प्रकार 48 छात्रों का प्राप्तांक 6σ मानों तक वितरित होंगें। उसे तीन समान खंडों में विभाजित करने पर एक खंड का मान $\frac{6\sigma}{3} = 2\sigma$ होगा।

प्रथम खंड का मान:- $= -3\sigma - (-1\sigma) = 2\sigma$

= 49.86 - 34.13

= 15.73 या 16% केसेज

द्वितीय खंड का मान $= 1\sigma + (-1\sigma) = 2\sigma = 34.13 + 34.13 = 68.26\%$

= 68% केसेज

तृतीय खंड का मान $= +3\sigma - (-1\sigma) = 2\sigma = 49.86 - 34.13$

= 15.73 या 16% केसेज

प्रश्न में N= 48 के आधार पर तथा तीन खंडों के प्रतिशत के आधार पर प्रत्येक खंड में fe का मान ज्ञात किया जा सकता है।

प्रथम खंड में छात्रों की संख्या $= \frac{16}{100} x 48 = 7.68$

द्वितीय खंड में छात्रों की संख्या $= \frac{68}{100} x 48 = 32.64$

तृतीय खंड में छात्रों की संख्या $= \frac{16}{100} x 48 = 7.68$

पंक्ति (Row)	**स्तंभ (Columns)**			**योग**
	असहमत	**उदासीन**	**सहमत**	
Fo	25	11	12	48
Fe	7.68	32-64	7.68	48
fo – fe	17.32	21.64	4.32	
$(fo - fe)^2$	299.98	468.29	18-66	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$	39.06	14.32	2.43	

$\Sigma X^2 = 39.06 + 14.35 + 2.43$

=55 - 84

df = (c-1) = (3-1) = 2

X^2 की तालिका में df का मान .01 स्तर पर 9.12 है। अत: 1% विश्वास स्तर पर निराकरणीय प्राकल्पना अस्वीकृत की जाती है और कहा जा सकता है कि 1% विश्वास स्तर पर तीनों श्रेणियों के आँकड़ों में सार्थक अन्तर है।

(iii) स्वतंत्र वितरण परिकल्पना (Hypothesis of Independent Distribution) जब चर के आधार एक से अधिक होते हैं तो चर के स्वरूप पर कोई प्रतिबंध नहीं होता है तो ऐसी परिकल्पना को स्वतंत्रता की परिकल्पना कहते हैं। इसमें एक चर कई भागों में वितरित हो सकता है या उनके समरूप दूसरे प्रेक्षित चर भी हो सकते हैं। इस प्रकार की तालिका को आसंग सारणी (Contingency Table) कहते हैं।

उदाहरण:- एक कक्षा के छात्रों व छात्राओं की तीन विषयों गणित, भौतिकी तथा जीवविज्ञान का पसन्द जानने के लिए एक अध्ययन किया गया। X^2 की गणना करके बताइए कि क्या विषम पसन्द की निम्न आवृत्तियों में सार्थक अन्तर है?

विद्यार्थी	विषय	गणित	भौतिकी	जीव विज्ञान	योग
छात्र		16	28	36	80
छात्रा		30	40	10	80
योग		46	68	46	160

हल:- इस स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए यहाँ छात्रों व छात्राओं की संख्या का योग किया जाता है। प्रत्येक विषय के लिए छात्रों व छात्राओं की संयुक्त पसन्द के आधार पर दोनों लिंगों के लिए अलग-अलग प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकालते हैं। इस उदाहरण में छात्रों व छात्राओं की संख्या (80+80) = 160 है जिसमें 16+30 = 46 गणित, 28+40 = 68 भौतिकी तथा 36+10 = 46 छात्र-छात्राऐं जीवविज्ञान को पसंद करते हैं। प्रत्येक लिंग के लिए fe का मान निम्न प्रकार से ज्ञात करेंगें।

160 में गणित विषय पसन्द करने वालों की संख्या = 46

80 में गणित विषय पसन्द करने वालों की संख्या = $\frac{46x80}{160} = 23$

160 में भौतिकी विषय पसन्द करने वालों की संख्या = 68 80 में भौतिकी विषय पसन्द करने वालों की संख्या = $\frac{68x80}{160} = 34$

160 में जीवविज्ञान विषय पसन्द करने वालों की संख्या = 46 80 में जीवविज्ञान विषय पसन्द करने वालों की संख्या = $\frac{46x80}{160} = 23$

दोनों लिंगों के लिए तीनों विषयों के लिए निम्नलिखित fe हुई:-

विद्यार्थी	**विषय**	**गणित**	**भौतिकी**	**जीवविज्ञान**	**योग**
छात्र	fe	23	34	23	80
छात्रा	fe	23	34	24	80

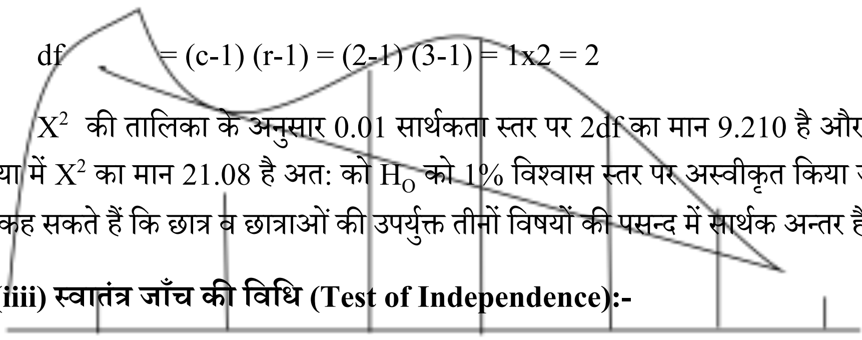
X^2 की गणना निम्न प्रकार से होगी:-

विद्यार्थी छात्र	विषय fo fe	गणित 16 23	भौतिकी 28 34	जीवविज्ञान 36 23	योग 80 80
fo – fe		-7	-6	13	
$(fo - fe)^2$		49	36	169	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$		2.13	1.06	7.35	
विद्यार्थी	**विषय**	**गणित**	**भौतिकी**	**जीवविज्ञान**	**योग**
छात्रा	**Fo**	**30**	**40**	**10**	**80**
	Fe	**23**	**34**	**23**	**80**
fo – fe		7	6	-13	
$(fo - fe)^2$		49	36	169	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$		2.13	1.06	7.35	

$$\Sigma X^2 = 2.13 + 1.06 + 7.35 + 2.13 + 1.06 + 7.35$$

$$= 21.08$$

df = (c-1) (r-1) = (2-1) (3-1) = 1x2 = 2



X^2 की तालिका के अनुसार 0.01 सार्थकता स्तर पर 2df का मान 9.210 है और प्रस्तुत समस्या में X^2 का मान 21.08 है अत: को H_O को 1% विश्वास स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है तथा कह सकते हैं कि छात्र व छात्राओं की उपर्युक्त तीनों विषयों की पसन्द में सार्थक अन्तर है।

(iiii) स्वातंत्र जाँच की विधि (Test of Independence):-

उदाहरण **-3σ** लेखि **-2σ** क्रा में **-1σ** स्थिति और ब **+1σ** दः **+2σ** ए **+3σ** ये गये ए:-

बच्चों की दशा	आवास स्थिति		
	स्वच्छ	अस्वच्छ	योग
स्वच्छ	76	43	117
औसत स्वच्छ	38	17	55
मलिन	25	47	72
योग	139	107	246

क्या ये परिणाम सुझाव देते हैं कि आवास स्थिति, बच्चों की दशा को प्रभावित करती है।

हलः-

शून्य परिकल्पना (H_O) : fo = fe (अर्थात् गुण स्वतंत्र हैं, आवास स्थिति तथा स्वास्थ्य में कोई संबंध नहीं है)

वैकल्पिक परिकल्पना (H_1) fo # fe (अर्थात् गुण स्वतंत्र नहीं हैं, आवास स्थिति तथा स्वास्थ्य आपस में सम्बन्धित है)

सार्थकता स्तर (x) = 0.5 सारणी मूल्य (क्रान्तिक मान) X^2= 5.99)

df = (c-1) (r-1) = (3-1) (2-1) = 2

X^2 का परिकलनः

Fo	Fe	fo – fe	(fo – fe)^2	$\frac{(fo-fe)^2}{fe}$
76	$\frac{139x119}{246}=67$	- 9	81	1.20
38	$\frac{139x55}{246}=31$	+7	49	1.58
25	$\frac{139x72}{246}=41$	-16	256	6.24
43	$\frac{107x119}{246}=527$	-9	81	1.56
17	$\frac{107x119}{246}=24$	-7	49	2.04
47	$\frac{107x72}{246}=31$	+16	256	8.26
$\Sigma fo = 246$	$\Sigma fe = 246$			X^2= 20.88

X^2 का परिकलित मूल्य (20.88) जो सारणी मूल्य से (5.991) से काफी ज्यादा है। अतः हमारी शून्य परिकल्पना पूर्णतया गलत है अर्थात् आवास स्थिति एवं बच्चों की दशा में संबंध है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

1. ……………वक्र का संपूर्ण वितरण $+3\sigma$ तथा -3σ के बीच फैला रहता है।
2. काई-वर्ग परीक्षण एक …………साँख्यिकीय विधि है।
3. काई-वर्ग परीक्षण ………………के मध्य अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (test of significance) करता है।
4. किसी भी वितरण की वास्तविक आवृति……………कहलाती है।
5. किसी भी वितरण की सैद्धांतिक आवृति…………… कहलाती है।
6. df = (c-1) (………..)

8.10 येट संशोधन (Yate's Correction):

काई वर्ग के अनुप्रयोग की एक आवश्यक शर्त यह है कि कोई भी कोष्ठ-आवृत्ति 5 से कम नहीं होना चाहिए अन्यथा X^2 का मान भ्रमात्मक निकलेगा। ऐसी स्थिति पर येट संशोधन का किया जाना आवश्यक समझा जाता है। इस संशोधन के अनुसार 2x2 सारणी में दी हुई सबसे छोटी आवृत्ति में

$\frac{1}{2}$ या 0.5 जोड़ दिया जाता है और शेष 3 आवृत्तियों को इस ढंग से समायोजित किया जाता है कि सीमान्त जोड़ पूर्ववत् रहे। इस संशोधन के फलस्वरूप प्रत्येक अवलोकित और उसकी तत्संवादी प्रत्याशित आवृत्ति का अन्तर 0.5 से कम हो जाने पर X^2 का मूल्य वास्तविकता के अधिक निकट हो जाता है। इस संशोधन को ((fo - fe) - 0.05) क्रिया द्वारा भी सम्पन्न किया जा सकता है।

8.11 आवृत्तियों का समूहन (Pooling of frequencies):

जब कभी प्रत्याशित आवृत्तियाँ कम हों (विशेषकर 5 से कम) तब fo और fe का अंतर ज्ञात करने से पहले ही ऐसी दो या दो से अधिक आवृत्तियों को जोड़ दिया जाता है। ध्यान रहे df का निर्धारण इस समूहन क्रिया के बाद प्राप्त वर्गों की संख्या के आधार पर ही किया जाता है। जैसे यदि 10 वर्गों में से 3 वर्गों की आवृत्ति 5 से कम है तो इन तीनों का एक वर्ग बनाने पर कुल वर्गों की संख्या 8 होगी और df = 8-1=7 होगी न कि (10-1 = 9)।

उदाहरण:- निम्न सूचनाएँ 50 प्राथमिक विद्यालयों के प्रतिदर्श से प्राप्त की गयी थीं।

	शहरी प्राथमिक विद्यालय	ग्रामीण प्राथमिक विद्यालय	योग
शिक्षक	17	18	35
शिक्षिका	3	12	15
	20	30	50

क्या यह कहा जा सकता है कि शहरों की अपेक्षा गॉवों में शिक्षिकाएँ अपेक्षाकृत अधिक हैं ।

हल:- H_o : fo = fe, H_1 : fo # fe, α =.05, X^2= 3.841 df = 1

इस प्रश्न में येट संशोधन किया जायेगा। हमारी शून्य परिकल्पना यह है कि स्थान तथा लिंग में कोई संबंध नहीं, क्योंकि एक आवृत्ति 5 से कम है अर्थात् शहरी प्राथमिक विद्यालयों में 3 की आवृत्ति होने के लिए यह संशोधन किया गया है।

fo (दिया हुआ) **fo (संशोधन)**

16.5	18.5	35
3.5	11.5	15
20	30	50

17	18	35

3	12	15
20	30	50

X^2 का परिकलन:

Fo	Fe	fo – fe	$(fo – fe)^2$	$(fo - fe)^2 / fe$
16.5	$\frac{20x35}{50}=14$	+2.5	6.25	6.25÷14=0.45
3.5	$\frac{20x15}{50}=6$	-2.5	6.25	6.25÷6=1.04
18.5	$\frac{30x35}{50}=21$	-2.5	6.25	6.25÷21=0.30
11.5	$\frac{30x15}{50}=9$	+2.5	6.25	6.25÷9=0.69
$\Sigma fo = 50$	$\Sigma fe = 50$	0		$X^2 = 2.48$

5% सार्थकता स्तर पर 1 df पर आधारित X^2 का परिकलित मूल्य 2.48 इसके क्रान्तिक मूल्य 3.841 से कम है, अत: हमारी शून्य परिकल्पना सत्य है अर्थात् स्थान तथा लिंग में कोई संबंध नहीं है अर्थात् शहरों की अपेक्षा गॉवों में शिक्षिका अपेक्षाकृत अधिक होना सिद्ध नहीं होता है।

8.12 अन्वायोजन की उत्कृष्टता की जाँच (Test of Goodness of Fit):

काई वर्ग परीक्षण को अन्वायोजन की उत्तमता की जाँच के लिए प्रयोग किया जाता है। इससे हमें सिद्धान्त (Theory of expectation) और तथ्य (Fact or observation) के अन्तर की सार्थकता (Significance) का पता चलता है। वस्तुत: अन्वायोजन- उत्तमता जाँच सैद्धान्तिक और प्रतिदर्श बंटन की अनुरूपता या संगति का परीक्षण है। यदि X^2 का परिकलित मान मूल्य सारणी से देखे गए X^2 मूल्य से कम होता है तो अन्वायोजन उत्तम माना जाता है अर्थात् अवलोकित और

प्रत्याशित आवृत्तियों के वक्र लगभग एक दूसरे के अनुरूप है। इसके विपरीत यदि X^2 का परिकलित मूल्य सारणी मूल्य से अधिक होता है तो वक्र अन्वायोजन उत्तम नहीं है (The fit is not good) , वास्तविक व प्रत्याशित आवृत्तियों के वक्रों में काफी दूरी है, अर्थात् अन्तर सार्थक है, केवल दैव कारण से नहीं है।

उदाहरण:- निम्न सारणी में किसी सप्ताह के विभिन्न दिनों में हुई विमान दुर्घटनाओं की संख्या प्रदर्शित की गयी है।

दिन	**कुल**	**रविवार**	**सोमवार**	**मंगलवार**	**बुधवार**	**वृहस्पतिवार**	**शुक्र**	**शनि**
दुर्घटनाओं की सख्ंया	04	14	16	8	12	11	9	14

बताइए कि क्या सप्ताह में सातों दिनों में वायुमान दुर्घटनाएँ समान रूप से वितरित हैं?

हल:- H_O : fo= fe (अवलोकित बंटन तथा प्रत्याशित बंटन समान है)

H_1 : fo # fe (अवलोकित बंटन तथा प्रत्याशित बंटन में अन्तर सार्थक है)

x= 0.05 (X^2 क्रान्तिक मूल्य (सारणी मूल्य) – 12.59)

df = (n- 1 - बंटन के प्राचलों की संख्या) =(7-1-0) =6

यदि हम यह कल्पना करें कि सप्ताह के सातों दिनों में वायुयान दुर्घटनाऐं समान रूप से वितरित हैं तो दुर्घटनाओं की दैनिक प्रत्याशित आवृत्ति 84÷7 = 12 होगी।

X^2 का परिकलन :

दिन	**Fo**	**Fe**	**fo – fe**	**(fo – fe)^2**	$\frac{(fo-fe)^2}{fe}$
रविवार	14	84/7=12	+2	4	0.33
सोमवार	16	84/7=12	+4	16	1.33
मंगलवार	8	84/7=12	-4	16	1.33
बुधवार	12	84/7=12	0	0	0
वृहस्पतिवार	11	84/7=12	-1	1	0.08
शुक्रवार		84/7=12	+2	4	0.33
शनिवार	14	84/7=12	+2	4	0.33

योग	$\Sigma fo = 84$	$\Sigma fe = 84$	-	-	X^2=4.15

X^2 की सारणी देखने से पता चलता है कि 5% सार्थकता स्तर पर 6 df के लिए X^2 का मूल्य 12.59 है। गणना द्वारा प्राप्त X^2 का मूल्य 4.15 है जो सारणी मूल्य से बहुत कम है, अत: शून्य परिकल्पना स्वीकृत है अत: आवृत्तियाँ समान है तथा दुर्घटनाएँ सप्ताह के दिनों में समान रूप से वितरित हैं।

8.13 समग्र के प्रसरण का परीक्षण (Test of the Population Variance):

X^2 बंटन के आधार पर समग्र के प्रसरण की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात की जा सकती हैं तथा समग्र के प्रसरण संबंधी किसी दावे को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत किया जा सकता है।

समग्र के प्रसरण (σ^2 प्राचल) तथा प्रतिदर्श का प्रसरण (S^2 प्रतिदर्शज) का अन्तर्सम्बन्ध (n-1) df के लिए काई वर्ग बंटन का अनुसरण करता है।

$$X2 = \frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{n s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$$

इस प्रकार दिये गये प्रसरण के मूल्यों के आधार पर X^2 का मूल्य ज्ञात करके (n-1) df के लिए दिए गए X^2 के सारणी मूल्य से तुलना कर परिकल्पना स्वीकृत अथवा अस्वीकृत की जाती है।

उदाहरण:- एक पेन निर्माता यह दावा करता है कि उसकी कम्पनी द्वारा निर्मित पेनों के लेखन काल का प्रसरण 200 वर्ग मी0 है। 16 पेनों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया, जिसका प्रसरण (Variance) 250 वर्ग मी0 है। क्या निर्माता का दावा 5% सार्थकता स्तर पर सही है?

हल:- $H_O : \sigma_0^2 = 200\, m^2$

$H_1 : \sigma_0^2 \quad \# \quad 200\, m^2$

$X = 0.05 \quad df = 16 - 1 = 15 \quad X^2$ सारणी का मान = 24.996

$$X2 = \frac{n s^2}{\sigma_0^2} = \frac{16 x 250}{200} = 20$$

परिकलित X^2 (20) < क्रान्तिक मूल्य X^2 (24.996) : अत: H_O स्वीकृत की जाती है, अर्थात् निर्माता का दावा सही है। अन्तर सार्थक नहीं है।

अपनी अधिगम प्रगति जानिए

7. अन्वायोजन- उत्तमता जाँच सैद्धान्तिक और ....की अनुरूपता या संगति का परीक्षण है।

8. काई वर्ग के अनुप्रयोग की एक आवश्यक शर्त यह है कि कोई भी कोष्ठ-आवृत्ति से कम नहीं होना चाहिए।

9. काई वर्ग के परिकलन हेतु कोई भी कोष्ठ-आवृत्ति में 5 से कम होने पर ....संशोधन का प्रयोग आवश्यक समझा जाता है।

10. काई वर्ग परीक्षण द्वारा अन्वायोजन की उत्तमता की जाँच से सिद्धान्त और ....के अन्तर की सार्थकता का पता चलता है।

8.14 सारांश (Summary):

प्रस्तुत इकाई में आपने अप्राचल साँख्यिकीय विधि (Non Parametric Method) में काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण के प्रमुख पक्षों का अध्ययन किया। अप्राचल विधियों (Non Parametric Methods) में काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण एक प्रमुख विधि है।

काई-वर्ग परीक्षण आवृत्तियों (frequencies) के मध्य अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (test of significance) करता है। अवलोकित (Observed) तथा प्रत्याशित (Expected) आवृत्तियों के अन्तरों के शून्य होने पर काई-वर्ग का मान शून्य हो जाता है। जबकि अधिक अन्तर होने पर काई वर्ग का मान बढ़ता जाता है। काई-वर्ग का मान सदैव धनात्मक होता है।काई-वर्ग बंटन एक प्रायिकता बंटन (probability distribution) है जो केवल स्वातन्त्रय कोटियों (Degrees of freedom, df) पर निर्भर करता है। स्वातन्त्रय कोटियों के बहुत कम होने पर काई वर्ग बंटन धनात्मक रूप से विषम होता है, परन्तु जैसे-जैसे स्वातन्त्रय कोटियॉं बढ़ती जाती है, यह प्रसामान्य बंटन के अनुरूप हो जाता है।

काई वर्ग का परिकलित मान संबंधित स्वातन्त्रय कोटि तथा निश्चित सार्थकता स्तर पर (Level of Significance) सारणी मान से कम होता है, तब शून्य परिकल्पना (Null hypothesis) स्वीकृत की जाती है। इसके विपरीत यदि परिकलित काई-वर्ग का मान सारणी मान से अधिक होता है तथा अवलोकित तथा प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अन्तर को सार्थक माना जाता है, तब वैकल्पिक परिकल्पना (Alternate Hypothesis) को स्वीकृत किया जाता है। अर्थात् शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है।

इस इकाई में X^2 के प्रयोग की शर्तें का भी उल्लेख किया गया है।

X^2 में संचयात्मक गुण (Additive property of X^2) पाया जाता है व इसके बंटन का स्वरूप स्वतंत्रता के अंश पर निर्भर करता है।

X^2 जाँच के उपयोग (Application of X^2 test):आधुनिक शैक्षिक शोध में एक साँख्यिकीय प्रविधि के रूप में काई-वर्ग परीक्षण के बहुत व्यापक उपयोग हैं। यह शोधकर्ता का एक महत्वपूर्ण उपकरण है, जिसका निम्न परीक्षण में प्रयोग किया जाता है:-

i. स्वतंत्रता की जाँच (Test of Independence)
ii. अन्वायोजन-उत्कृष्टता की जाँच (Test of Goodness of fit)
iii. समग्र प्रसरण की जाँच (Test of Population Variance)
iiii. सजातीयता की जाँच (Test of Homogeneity)

X^2 का मान परिकलित करने के लिए प्रत्याशित आवृत्तियों की आवश्यकता होती है जिसकी गणना निम्न तीन परिकल्पनाओं के आधार पर की जाती है-

iiii. समान वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Equal Distribution)
v. प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना Hypothesis of Normal Distribution)

vi. स्वतंत्र वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Independent Distribution)

काई वर्ग के अनुप्रयोग की एक आवश्यक शर्त यह है कि कोई भी कोष्ठ-आवृत्ति 5 से कम नहीं होना चाहिए अन्यथा X^2 का मान भ्रमात्मक निकलेगा। ऐसी स्थिति पर येट संशोधन का किया जाना आवश्यक समझा जाता है।

8.15 शब्दावली (Glossary):

काई-वर्ग परीक्षण : अप्राचल साँख्यिकीय विधि (Non Parametric Method) में काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण एक प्रमुख विधि है। काई-वर्ग परीक्षण आवृत्तियों (frequencies) के मध्य अन्तर की सार्थकता का परीक्षण (test of significance) करता है।

अवलोकित (Observed)आवृत्ति: किसी भी वितरण की वास्तविक आवृति।

प्रत्याशित (Expected) आवृत्ति: किसी भी वितरण की सैद्धांतिक आवृति।

अन्वायोजन-उत्कृष्टता(Goodness of fit):अन्वायोजन उत्तम तब माना जाता है जब अवलोकित और प्रत्याशित आवृत्तियों के वक्र लगभग एक दूसरे के अनुरूप हों ।

येट संशोधन: इसके अनुसार काई-वर्ग परीक्षण के परिकलन में प्रयुक्त 2x2 सारणी में दी हुई सबसे छोटी आवृत्ति में $\frac{1}{2}$ या 0.5 जोड़ दिया जाता है और शेष 3 आवृत्तियों को इस ढंग से समायोजित किया जाता है कि सीमान्त जोड़ पूर्ववत् रहे।

स्वतंत्रता की जाँच (Test of Independence): X^2 द्वारा दो गुणों (attributes) में साहचर्य (association) का परीक्षण किया जाता है।

8.16 अपनी अधिगम प्रगति जानिए से सबंधित प्रश्नों के उत्तर:

1. प्रसामान्य 2. अप्राचल 3. आवृत्तियों (frequencies) 4. **अवलोकित (Observed)आवृत्ति** 5. **प्रत्याशित (Expected) आवृत्ति** 6. (r-1) 7. प्रतिदर्श बंटन 8. 5 9. येट 10. तथ्य

8.17 संदर्भ ग्रन्थ सूची/ पाठ्य सामग्री (References and Useful Readings):

1. Garret, H.E. (1972). Statistics in Psychology and Education, New York, Vakils, Feffers and Simans Pvt. Ltd.
2. Best, John W. & Kahn (2008). Research in Education, New Delhi, PHI.
3. Good, Carter, V. (1963). Introduction to Educational Research, New York, Rand Mc Nally and company.
4. Koul, Lokesh (2002). Methodology of Educational Research New Delhi, Vikas Publishing Pvt. Ltd.
5. Karlinger, Fred N. (2002). Foundations of Behavioural Research, New Delhi, Surjeet Publication.
6. सिंह, ए०के० (2007) : मनोविज्ञान, समाजशास्त्र तथा शिक्षा में शोध विधियाँ, नई दिल्ली, मोतीलाल बनारसी दास
7. गुप्ता, एस०पी० (2008) : मापन एवं मूल्यांकन, इलाहाबाद, शारदा पब्लिकेशन

8. शर्मा, आर०ए० (2001) :शिक्षा अनुसंधान के मूल तत्व एवं शोध प्रक्रिया, मेरठ, आर०लाल० पब्लिकेशन्स।

9. राय, पारसनाथ (2001) : अनुसंधान परिचय, आगरा, लक्ष्मी नारायण अग्रवाल पब्लिकेशन्स।

8.17 निबंधात्मक प्रश्न (Essay Type Questions):

1. काई वर्ग (Chi-Square) परीक्षण की विशेषताओं को स्पष्ट कीजिए।
2. काई-वर्ग परीक्षण के महत्व की व्याख्या कीजिए।
3. शैक्षिक अनुसंधान में काई-वर्ग परीक्षण के उपयोग को स्पष्ट कीजिए।
4. काई-वर्ग परीक्षण के प्रयोग की शर्तों को स्पष्ट कीजिए।
5. निम्न आँकड़े से काई-वर्ग परीक्षण का मान परिकलित कीजिए।

	उत्तीर्ण	अनुत्तीर्ण	पुन:परीक्षा	कुल
लड़के	35	40	25	100
लडकियां	25	35	40	100
कुल	60	75	65	200

(उत्तर : .05 सार्थकता स्तर पर तथा df=4 पर काई वर्ग परीक्षण का मान 3.45)

परिशिष्ट (Appendix)

परिशिष्ट ०१ : प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत माध्य व प्रमाप विचलन के मध्य क्षेत्रफल

परिशिष्ट ०२ : प्रोडक्ट मोमेंट सहसंबंध गुणांक के लिए क्रांतिक मान

परिशिष्ट ०३ : स्टूडेंट टी वितरण के लिए क्रांतिक मान

परिशिष्ट ०४ : काई वर्ग वितरण के लिए क्रांतिक मान

परिशिष्ट ०५ : एफ वितरण (एनोवा) के लिए क्रांतिक मान

परिशिष्ट ०१ : प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत माध्य व प्रमाप विचलन के मध्य क्षेत्रफल

Area lying under the Normal Curve

$z\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3290	.3314	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4383	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987									

परिशिष्ट ०२ : प्रोडक्ट मोमेंट सहसंबंध गुणांक के लिए क्रांतिक मान

Appendix B

Critical Values for Pearson's Product-Moment Correlation (r)

n	α = .10	α = .05	α = .02	α = .01	df
3	.988	.997	.9995	.9999	1
4	.900	.950	.980	.990	2
5	.805	.878	.934	.959	3
6	.729	.811	.882	.917	4
7	.669	.754	.833	.874	5
8	.622	.707	.789	.834	6
9	.582	.666	.750	.798	7
10	.549	.632	.716	.765	8
11	.521	.602	.685	.735	9
12	.497	.576	.658	.708	10
13	.476	.553	.634	.684	11
14	.458	.532	.612	.661	12
15	.441	.514	.592	.641	13
16	.426	.497	.574	.623	14
17	.412	.482	.558	.606	15
18	.400	.468	.542	.590	16
19	.389	.456	.528	.575	17
20	.378	.444	.516	.561	18
21	.369	.433	.503	.549	19
22	.360	.423	.492	.537	20
23	.352	.413	.482	.526	21
24	.344	.404	.472	.515	22
25	.337	.396	.462	.505	23
26	.330	.388	.453	.496	24
27	.323	.381	.445	.487	25
28	.317	.374	.437	.479	26
29	.311	.367	.430	.471	27
30	.306	.361	.423	.463	28
35	.282	.333	.391	.428	33
40	.264	.312	.366	.402	38
50	.235	.276	.328	.361	48
60	.214	.254	.300	.330	58
70	.198	.235	.277	.305	68
80	.185	.220	.260	.286	78
90	.174	.208	.245	.270	88
100	.165	.196	.232	.256	98
200	.117	.139	.164	.182	198
500	.074	.088	.104	.115	498
1,000	.052	.062	.074	.081	998
10,000	.0164	.0196	.0233	.0258	9,998

This table is abridged from Table 13 in *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 2nd ed. New York: Cambridge, 1958. Edited by E. S. Pearson and H. O. Hartley. Reproduced with the kind permission of the editors and the trustees of Biometrika.

परिशिष्ट ०३ : स्टूडेंट टी वितरण के लिए क्रांतिक मान

Critical Values of Student's Distribution (t)

	Two-tailed test level of significance		One-tailed test level of significance	
df	.05	.01	.05	.01
1	12.706	63.557	6.314	31.821
2	4.303	9.925	2.920	6.965
3	3.182	5.841	2.353	4.541
4	2.776	4.604	2.132	3.747
5	2.571	4.032	2.015	3.365
6	2.447	3.707	1.943	3.143
7	2.365	3.499	1.895	2.998

8	2.306	3.355	1.860	2.896
9	2.262	3.250	1.833	2.821
10	2.228	3.169	1.812	2.764
11	2.201	3.106	1.796	2.718
12	2.179	3.055	1.782	2.681
13	2.160	3.012	1.771	2.650
14	2.145	2.977	1.761	2.624
15	2.131	2.947	1.753	2.602
16	2.120	2.921	1.746	2.583
17	2.110	2.898	1.740	2.567
18	2.101	2.878	1.734	2.552
19	2.093	2.861	1.729	2.539
20	2.086	2.845	1.725	2.528
21	2.080	2.831	1.721	2.518
22	2.074	2.819	1.717	2.508
23	2.069	2.807	1.714	2.500
24	2.064	2.797	1.711	2.492
25	2.060	2.787	1.708	2.485
26	2.056	2.779	1.706	2.479
27	2.052	2.771	1.703	2.473
28	2.048	2.763	1.701	2.467
29	2.045	2.756	1.699	2.462
30	2.042	2.750	1.697	2.457
40	2.021	2.704	1.684	2.423
60	2.000	2.660	1.671	2.390
120	1.980	2.617	1.658	2.358
∞	1.960	2.576	1.645	2.326

परिशिष्ट ०४ : काई वर्ग वितरण के लिए क्रांतिक मान

Critical Values of Chi Square

	Level of significance	
df	.05	.01
1	3.84	6.64
2	5.99	9.21
3	7.82	11.34
4	9.49	13.28
5	11.07	15.09
6	12.59	16.81
7	14.07	18.48
8	15.51	20.09
9	16.92	21.67
10	18.31	23.21
11	19.68	24.72
12	21.03	26.22
13	22.36	27.69
14	23.68	29.14
15	25.00	30.58
16	26.30	32.00
17	27.59	33.41
18	28.87	34.80
19	30.14	36.19
20	31.41	37.57
21	32.67	38.93
22	33.92	40.29
23	35.17	41.64
[illegible]	[illegible]	[illegible]

24	36.42	42.98
25	37.65	44.31
26	38.88	45.64
27	40.11	46.96
28	41.34	48.28
29	42.56	49.59
30	43.77	50.89

परिशिष्ट ०५ : एफ वितरण (एनोवा) के लिए क्रांतिक मान

Critical Values of the F Distribution

df for denominator	α	*df* for numerator 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	.01	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
	.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.9	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1
4	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
	.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4
5	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89
6	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
	.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
	.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55

Critical Values of the F Distribution

df for numerator 15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	*df* for denominator
61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.10	1
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.05	
9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.10	2
19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.05	
99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.01	
5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.10	3
8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.05	
26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.01	

3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.10	4
5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.05	
14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	.01	
3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.10	5
4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.05	
9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.01	
2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.10	6
3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.05	
7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.01	
2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.10	7
3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.05	
6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.7	5.67	5.65	.01	
2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.10	8
3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.05	
5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.01	
2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.10	9
3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.05	
4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.01	
2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	.10	10
2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.05	
4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.01	
2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.10	11
2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.05	
4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.6	.01	
2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.10	12
2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.05	
4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.01	
2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.10	13
2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21	.05	
3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17	.01	
2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.83	1.80	1.80	.10	14
2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.18	2.14	2.13	.05	
3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.09	3.03	3.00	.01	
1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.10	15
2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.05	
3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.01	
1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	.10	16
2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01	.05	
3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75	.01	

Critical Values of the F Distribution

df for denominator	α	*df* for numerator 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
22	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
60	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

60	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
120	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	.01	6.85	4.79	3.95	3.51	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
∞	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

Critical Values of the F Distribution

df for numerator													*df* for denominator
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	
1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.10	17
2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.05	
3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65	.01	
1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.10	18
2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.05	
3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57	.01	
1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63	.10	19
2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	.05	
3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49	.01	
1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.10	20
2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.05	
3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.01	
1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.10	22
2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.05	
2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.01	
1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.10	24
2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.05	
2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.01	
1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.10	26
2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.05	
2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.01	
1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.10	28
2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.05	
2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.01	
1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.10	30
2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.05	
2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.01	
1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.10	40
1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.05	
2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.01	
1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.10	60
1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.05	
2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.01	
1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.10	120
1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.05	
2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.01	
1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.10	200
1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.05	
2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.01	
1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.10	∞
1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.05	
2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.01	